D-MAVT & D-MATL — Analysis I & II — Winter 2014
Prof. Dr. Paul Biran

Musterlösungen Prüfung

1. (a) W.
   (b) FW.
   (c) FWW.
   (d) FWFF.

2. (a) Für die Parametrisierung der durch die Gleichung $y = ax^b$ gegebenen Kurve setzt man x als Parameter und definiert:

$$\vec{r}(t) := (t, at^b), \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Die am Teilchen verrichtete Arbeit W lässt sich also folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned} W &= \int_{y=ax^b} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \vec{f}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(c \cdot t \cdot at^b,\, t^6 \cdot (at^b)^2\right) \cdot \left(1,\, abt^{b-1}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(act^{b+1} + a^3bt^{3b+5}\right)\mathrm{d}t = \frac{ac}{b+2} + \frac{a^3b}{3(b+2)} = \frac{3ac + a^3b}{3(b+2)}. \end{aligned}$$

   (b) Die Arbeit W ist genau dann unabhängig von b, wenn $\frac{\partial W}{\partial b} = 0$ ist. Die Ableitung lautet

$$\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{a(2a^2 - 3c)}{3(b+2)^2}.$$

Sie ist genau dann null, wenn $2a^2 - 3c = 0$ ist; d.h. wenn $a = \sqrt{3c/2}$ ist.

   (c) Nach Einsetzen des Ergebnisses von (b) in den Ausdruck von W folgt, dass $W = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{3c}{2}}$ in jenem Fall.

3. Nehmen wir an, dass $x \neq 0$ ist (für $x = 0$ muss $y = 0$ sein). Dann hat man:
$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right).$$
Bei dieser Gleichung wenden wir die Substitution $y = xv$ an, um sie in die folgende separierbare Gleichung umzuwandeln:
$$xv' = v^2 + v \qquad\qquad (*)$$
Wir lösen die Gleichung $(*)$:
$$\begin{aligned}(*) \iff \frac{v'}{v(v+1)} = \frac{1}{x} &\iff \frac{v'}{v} - \frac{v'}{v+1} = \frac{1}{x} \\ &\implies \ln|v| - \ln|v+1| = \ln|x| + C \implies \frac{v}{v+1} = Kx \qquad (K = \pm e^C) \\ &\implies v = \frac{Kx}{1-Kx}.\end{aligned}$$
Einsetzen von $v = y/x$ ergibt
$$y = \frac{Kx^2}{1-Kx}.$$
Aus der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ folgt, dass $K = 1/2$ ist und deshalb
$$y = \frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{x^2}{2-x}$$
ist, wenn $x \neq 0$ ist. Man soll bemerken, dass der Ausdruck rechts die Gleichung auch an der Stelle $x = 0$ erfüllt, denn für $x = 0$ wäre $y = 0$. Dieser Ausdruck ist für alle reellen Zahlen ausser $x = 2$ definiert.

4. Man bemerke, dass die Fläche Z mit dem Rand des Zylinders
$$B = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 \leq 4 \;\&\; |z| \leq 2\}$$
übereinstimmt (d.h. $\partial B = Z$). Nach dem Satz von Gauss ist daher der Fluss
$$\Phi = \iint_Z \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O = \iiint_B \mathbf{div}\ \vec{F}\, \mathrm{d}V.$$

Die Divergenz von $\vec{F}$ ist:

$$\mathbf{div}\ \vec{F} = \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial z} = \frac{x}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2} + e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}.$$

Durch Anwendung von zylindrischen Koordinaten lässt sich der Fluss berechnen wie folgt:

$$\begin{aligned}\Phi = \iiint_B e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V &= \int_{-2}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= 8\pi\int_0^2 \rho e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = 4\pi\ e^{\rho^2}\Big|_0^2 = 4\pi(e^4-1).\end{aligned}$$

5. Aus der ersten Gleichung erhält man $y = \frac{\dot{x}+7x}{4}$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}+7x}{4}\right) = -9x + 5\left(\frac{\dot{x}+7x}{4}\right) + e^{-t} \iff$$

$$\iff \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 4e^{-t} \qquad (*).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung ist $\lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2$. Die doppelte Nullstelle -1 gibt Anlass zur allgemeinen Lösung

$$x_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}.$$

Benutzt man für die partikuläre Lösung den Ansatz $x_p(t) = At^2e^{-t}$, so erhält man durch Einsetzen $A = 2$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $(*)$ lautet folglich

$$x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + 2t^2e^{-t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ folgt $C_1 = 0$. Einsetzen von $x(t)$ in die erste Gleichung liefert

$$y(t) = \frac{1}{4}C_2e^{-t} + \left(\frac{3}{2}C_2 + 1\right)te^{-t} + 3t^2e^{-t}.$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $C_2 = 0$. Die vollständige Lösung lautet somit

$$\left|\begin{array}{lcl} x(t) &=& 2t^2e^{-t} \\ y(t) &=& te^{-t} + 3t^2e^{-t}. \end{array}\right.$$

6. Der Abstand zwischen einem Punkt $(x_0,\, y_0)$ und einer geraden Linie $Ax + By + C = 0$ auf der Ebene lässt sich durch die folgende Formel berechnen:
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
Für diese Aufgabe wendet man diese Formel an, indem man zuerst die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ parametrisiert und dann den Abstand zwischen einem Punkt auf der Ellipse und die gerade Linie $x + y - 4 = 0$ als Funktion des Parameters darstellt. Eine Parametrisierung der Ellipse lautet
$$r(t) = (2\cos t,\, \sin t),$$
mit $t \in [-\pi, \pi]$. Dann ist
$$d(t) = \frac{|2\cos t + \sin t - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 - 2\cos t - \sin t),$$
weil $2\cos t + \sin t \leq 3 < 4$ ist. Wir bestimmen die Extrema dieser Funktion; die Ableitung lautet $d'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sin t - \cos t)$. Sie ist genau dann null, wenn $t \in \left\{\arctan\frac{1}{2},\, \arctan\frac{1}{2} - \pi\right\}$ ist. Wir werten die Funktion d an diesen Stellen und an den Randpunkten aus und bekommen:
$$d(-\pi) = d(\pi) = \frac{6}{\sqrt{2}}$$
$$d\left(\arctan\frac{1}{2}\right) = \frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \qquad d\left(\arctan\frac{1}{2} - \pi\right) = \frac{4 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$
Somit ist der minimale Abstand $(4 - \sqrt{5})/\sqrt{2}$ und der maximale $(4 + \sqrt{5})/\sqrt{2}$.

7. Für einen homogenen Körper B mit Dichte 1 ist das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse durch die folgende Formel gegeben:
$$\Theta = \iiint_B \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}V.$$
Aus dem Bild und der Parametrisierung der Fläche ergibt sich, dass
$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq z \leq 3 \;\&\; x^2 + y^2 \leq \left(\frac{z}{3}\right)^4\right\}.$$

In unserem Fall lässt sich das Integral am einfachsten mittels zylindrischen Koordinaten lösen, z.B. wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \iiint\limits_B \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^3 \int_0^{\left(\frac{z}{3}\right)^2} \int_0^{2\pi} \left((\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2\right)\cdot\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^3 \int_0^{\left(\frac{z}{3}\right)^2} \int_0^{2\pi} \rho^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^3 \int_0^{\left(\frac{z}{3}\right)^2} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^3 \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\rho=0}^{\rho=\left(\frac{z}{3}\right)^2} \mathrm{d}z = \frac{2\pi}{4\cdot 3^8}\int_0^3 z^8\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2\cdot 3^8}\cdot \left.\frac{z^9}{9}\right|_{z=0}^{z=3} \\
&= \frac{\pi}{2\cdot 3^8}\cdot\frac{3^9}{9} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

8. Die Schnittmenge $K_1 \cap K_2$ besteht aus allen Punkten (x, y, z), die die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2-2cx+c^2 = 3 \qquad &\text{(K1)}\\
&x^2+y^2+z^2-2y = 0 \qquad &\text{(K2)}
\end{aligned}$$

gleichzeitig erfüllen.

Andererseits definieren wir die Funktionen $f,\, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, wie folgt:

$f(x,y,z) = (x-c)^2+y^2+z^2$ und $g(x,y,z) = x^2+(y-1)^2+z^2$.

Man soll bemerken, dass K_1 und K_2 Niveauflächen von f bzw. g sind. Deshalb sind die Gradienten von f und g Normalenvektoren zu den Kugeln K_1 bzw K_2. Für einen Punkt (x, y, z) in der Schnittmenge $K_1 \cap K_2$ sind die Tangentialebenen bezüglich K_1 und K_2 also genau dann senkrecht, wenn die Gradienten von f und von g orthogonal sind, d.h. wenn

$$\textbf{grad}\ f \cdot \textbf{grad}\ g = 0 \qquad (*)$$

an diesem Punkt erfüllt wird. Wir berechnen die Gradienten und ihr Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\textbf{grad}\ f(x,y,z) &= (2(x-c),\, 2y,\, 2z)\,,\\
\textbf{grad}\ g(x,y,z) &= (2x,\, 2(y-1),\, 2z)\,,\\
(\textbf{grad}\ f \cdot \textbf{grad}\ g)\,(x,y,z) &= 4x(x-c)+4y(y-1)+4z^2.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $(*)$ ist also äquivalent zu

$$x^2 + y^2 + z^2 - cx - y = 0 \qquad (\#).$$

Wir lösen nach c aus den Gleichungen (K1), (K2) und (#) auf:

- Aus (K1)-(K2) ergibt sich: $2cx - 2y = c^2 - 3$;
- Aus (#)-(K2) ergibt sich: $cx = y$;
- Aus den letzten zwei Gleichungen folgt, dass $c^2 - 3 = 0$ sein muss.

Somit folgt, dass $c = \pm\sqrt{3}$ sein muss, sodass die Tangentialebenen an allen Punkten in $K_1 \cap K_2$ senkrecht zueinander stehen. Bemerken Sie, dass für diese Werte die Schnittmenge tatsächlich nichtleer ist.

9. (a) Da die Rotation von $\vec{F}$ null ist und C_1 eine geschlossene Kurve ist, ergibt sich, dass die Arbeit von $\vec{F}$ entlang C_1 auch null ist. Tatsächlich ist die Arbeit nach dem Satz von Stokes

$$W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\Delta} \textbf{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O = 0,$$

wobei Δ das von C_1 berandete Dreieck ist und $\vec{n}$ der Einheitsvektor in die positive z Richtung (normal zu Δ) ist.

(b) Der Vektorfeld $\vec{F}$ ist konservativ, da der ganze dreidimensionale Raum einfach zusammenhängend ist. Wir suchen jetzt nach einem Potentialfeld v von $\vec{F}$ (d.h. **grad** $v = \vec{F}$. Hat man v bestimmt, dann ist die Arbeit von $\vec{F}$ entlang C_2

$$W = \int_{C_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r_2} = v\left(\vec{r_2}(4)\right) - v\left(\vec{r_2}(1)\right).$$

Man nehme also an, dass ein Skalarfeld v existiert, sodass

$$v_x = 3x^2 z \quad \& \quad v_y = z^2 \quad \& \quad v_z = x^3 + 2yz \qquad (*)$$

sind. Aus v_x folgt, dass

$$v(x, y, z) = x^3 z + a(y, z)$$

ist, wobei a eine Funktion von den Variablen y und z ist. Nach Ableitung bezüglich y ist $v_y(x, y, z) = a_y(y, z) \overset{(*)}{=} z^2$. Somit ist

$a(y,z) = yz^2 + b(z)$, wobei b eine Funktion der Variablen z ist, und folglich ist

$$v(x,y,z) = x^3 z + yz^2 + b(z).$$

Wir leiten jetzt bezüglich z ab und erhalten den Ausdruck $v_z(x,y,z) = b'(z) \overset{(*)}{=} 0$. Dann ist die Funktion b konstant und v ist der folgenden Art:

$$v(x,y,z) = x^3 z + yz^2 + B,$$

wobei B eine reelle Konstante ist. Wir wählen für die Berechnung das Potentialfeld mit $B = 0$ aus.

Die Arbeit von $\vec{F}$ ist also

$$\begin{aligned}
W &= v\left(\vec{r}_2(4)\right) - v\left(\vec{r}_2(1)\right) \\
&= v\left(\frac{\ln 4}{\ln 2},\, 4^{3/2},\, 4\cos 4\pi\right) - v\left(\frac{\ln 1}{\ln 2},\, 1^{3/2},\, \cos\pi\right) \\
&= v(2,8,4) - v(0,1,-1) \\
&= 2^3 \cdot 4 + 8 \cdot 4^2 - (0^3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^2 = 159.
\end{aligned}$$

10. Die Koeffizienten der Taylorreihe von f um null sind der Art $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, wobei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist. Wir müssen also die Ableitung von kleinster Ordnung von f, die nicht verschwindet, bestimmen. Man soll hier bemerken, dass der Integrand in $f(x)$ stetig ist; deshalb lässt sich die Leibnizsche Regel für die Differentiation von Integralen anwenden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x e^{-t^2} \sin tx \,\mathrm{d}t && \Longrightarrow \quad f(0) = 0; \\
f'(x) &= \int_0^x te^{-t^2} \cos tx \,\mathrm{d}t + e^{-x^2} \sin x^2 && \Longrightarrow \quad f'(0) = 0; \\
f''(x) &= -\int_0^x t^2 e^{-t^2} \sin tx \,\mathrm{d}t + 3xe^{-x^2} \cos x^2 && \\
&\quad - 2xe^{-x^2} \sin x^2 && \Longrightarrow \quad f''(0) = 0; \\
f^{(3)}(x) &= -\int_0^x t^3 e^{-t^2} \cos tx \,\mathrm{d}t + \left(3 - 10x^2\right) e^{-x^2} \cos x^2 && \\
&\quad - \left(2 + 3x^2\right) e^{-x^2} \sin x^2 && \Longrightarrow \quad f^{(3)}(0) = 3.
\end{aligned}$$

Somit ist der erste nicht verschwindende Koeffizient $\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$.