1. (a) Wir berechnen das Trägheitsmoment $J = \int_K (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}V$. Die Symmetrien von K weisen darauf hin, dass wir die folgende Variablentransformation $(x, r, \phi) \mapsto (x, y, z)$ anwenden sollten:

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= r\cos\phi \\ z &= r\sin\phi, \end{cases}$$

wobei $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und $\phi \in [0, 2\pi)$ sind. Somit ist das Differentialelement

$$\mathrm{d}V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -r\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

Man sieht, dass die von der Variablentransformation eingeführten Koordinaten nichts anderes sind als die Zylinderkoordinaten mit Hauptachse x statt wie üblich z. Für das Trägheitsmoment ergibt sich also

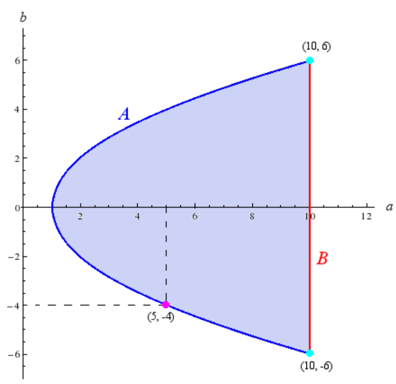
$$\begin{aligned} J &= \int_K (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{f(x)} (r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{f(x)} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (ax^2 + bx + 1)(1 - x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[-ax^3 + (a - b)x^2 + (b - 1)x + 1\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{a}{4} + \frac{a - b}{3} + \frac{b - 1}{2} + 1\right) = \frac{\pi}{24}(a + 2b + 6). \end{aligned}$$

Alternativ lässt sich J einfach aus der folgenden Formel der Analysis I bestimmen: $J = \int_0^1 \frac{\pi}{2} f(x)^4\,\mathrm{d}x$.

(b) Wir lösen (b) für die Funktion $\tilde{J}(a, b) = a + 2b + 6$; da $\tilde{J} = \frac{24}{\pi} J$ ein positives Vielfaches von J ist, liegt das Minimum von J genau im selben Punkt $(a, b) \in P$ wie das von J.

Man soll zuerst feststellen, dass die Funktion $\tilde{J}$ keine Extrema im Inneren des Gebietes P hat (siehe Bild des Gebietes), denn

$$\mathbf{grad}\,\tilde{J}(a, b) = (1,\ 2) \neq (0,\ 0).$$



Die Extrema von $\tilde{J}$ treten also auf dem Rand

$$\begin{aligned} \partial P &= \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |b| \le 6 \text{ und } \left(a = \frac{b^2}{4} + 1 \text{ oder } a = 10\right)\right\} \\ &= \underbrace{\left\{\left(\frac{b^2}{4} + 1, b\right) : |b| \le 6\right\}}_{=:A} \cup \underbrace{\{(10, b) : |b| \le 6\}}_{=:B} \end{aligned}$$

von P auf.

Für $(a,b) = \left(\frac{b^2}{4}+1, b\right) \in A$ ist $\tilde{J}(a,b) = \frac{b^2}{4} + 2b + 7$ eine Funktion einer Variablen, die wir $\tilde{J}_A(b)$ nennen. Wir bestimmen die Extrema von $\tilde{J}_A(b)$ für $|b| \leq 6$; dafür bestimmen ihre kritischen Werte

$$\tilde{J}_A{}'(b) = \frac{b}{2} + 2 = 0 \iff b = -4.$$

Für diesen kritischen Wert ist $a = 5$ und somit ist $\tilde{J}(5,-4) = \tilde{J}_A(-4) = 3$. Ausser $b = -4$ sind $b = -6$ und $b = 6$ auch kritische Werte von $\tilde{J}_A$: Für $b = -6$ sind $a = 10$ und $\tilde{J}(10,-6) = \tilde{J}_A(-6) = 4$; für $b = 6$ sind $a = 10$ und $\tilde{J}(10,6) = \tilde{J}_A(6) = 28$. Alternativ bemerkt man, dass $\tilde{J}_A$ eine quadratische Funktion mit positivem Leitkoeffizient ist und daher am kritischen Punkt ein globales Minimum hat.

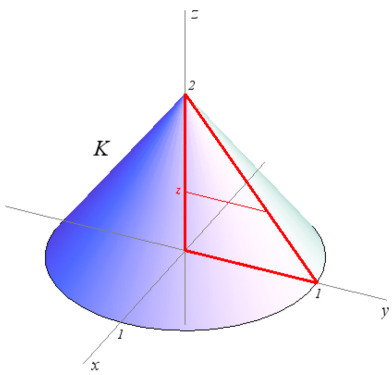
Für $(a,b) = (10,b) \in B$ ist $\tilde{J}(a,b) = 2b + 16$; wir nennen diese Funktion $\tilde{J}_B(b)$. Die Ableitung $\tilde{J}_B{}'(b) = 2$ ist nirgendwo null; daher sind die einzigen kritischen Punkte die Extrema des Intervalls $[-6,6]$, die wir schon bei $\tilde{J}_A$ betrachtet haben. Schliesslich vergleichen wir in der nächsten Tabelle die Werte der Funktion f an den drei kritischen Stellen:

(a,b)	$(5,-4)$	$(10,-6)$	$(10,6)$
$\tilde{J}(a,b)$	3	4	28
$J(a,b)$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$

Das globale Minimum von J in P beträgt also $\frac{\pi}{8}$ und wird im Punkt $(a,b) = (5,-4)$ angenommen.

2. Der Rotationskegel K mit Grundfläche G ist

$$K = \left\{(x,y,z) \,:\, 0 \leq z \leq 2,\; x^2 + y^2 \leq \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2\right\}.$$



Um den Fluss Φ von innen nach aussen durch die Oberfläche S von K zu bestimmen, wendet man den Satz von Gauss an:

$$\Phi = \int_S \vec{v} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}F = \int_K \mathbf{div}\, \vec{v}\, \mathrm{d}V,$$

wobei $\vec{n}$ ein nach aussen zeigender Einheitsvektor normal zu S ist.

Die Divergenz von $\vec{v}$ ist

$$\mathbf{div}\, \vec{v}(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 2z.$$

Die Symmetrien von K weisen hin, dass die Berechnung von Φ sich vereinfacht, wenn man Zylinderkoordinaten anwendet:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_K (3x^2+3y^2+2z)\,\mathrm{d}V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{2}} \left(3\rho^2\cos^2\phi + 3\rho^2\sin^2\phi + 2z\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{2}} \left(3\rho^3 + 2\rho z\right)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^2 \left[\frac{3}{4}\rho^4 + \rho^2 z\right]_{\rho=0}^{\rho=1-\frac{z}{2}} \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^2 \left[\frac{3}{4}\left(1-\frac{z}{2}\right)^4 + \left(1-\frac{z}{2}\right)^2 z\right] \mathrm{d}z \underset{u=1-z/2}{=} 4\pi \int_0^1 \left(\frac{3}{4}u^4 - 2u^3 + 2u^2\right) \mathrm{d}u \\
&= \pi\left(\frac{3}{5} - 2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{19}{15}\pi
\end{aligned}$$

Alternativ berechnet man den Fluss Φ direkt durch ein Integral über die Oberfläche S von K. Diese zerlegt sich in die Grundfläche $S_1 = G$ und den Kegelmantel S_2 und wir berechnen

$$\Phi = \int_S \vec{v} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}F = \int_{S_1} \vec{v} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}F + \int_{S_2} \vec{v} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}F.$$

Auf der Grundfläche G ist der nach aussen zeigende Normalenvektor konstant $\vec{n} = (0,0,-1)$, daher ergibt sich

$$\int_{S_1} \vec{v} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}F = \int_{S_1} -z\,\mathrm{d}F = 0.$$

Die Fläche S_2 wird stetig differenzierbar parametrisiert durch

$$s(z,\phi) = \left(\left(1-\frac{z}{2}\right)\cos(\phi), \left(1-\frac{z}{2}\right)\sin(\phi), z\right)$$

Man erhält für die partiellen Ableitungen

$$s_z(z,\phi) = \begin{pmatrix} -1/2\cos(\phi) \\ -1/2\sin(\phi) \\ 1 \end{pmatrix}, \; s_\phi(z,\phi) = \begin{pmatrix} -(1-\frac{z}{2})\sin(\phi) \\ (1-\frac{z}{2})\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und berechnet das Oberflächenelement

$$\vec{n}\,\mathrm{d}F = s_\phi \times s_z = \begin{pmatrix} (1-\frac{z}{2})\cos(\phi) \\ (1-\frac{z}{2})\sin(\phi) \\ (\frac{1}{2}-\frac{z}{4}) \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \begin{pmatrix} [(1-\frac{z}{2})\cos(\phi)]^3 \\ [(1-\frac{z}{2})\sin(\phi)]^3 \\ z^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} (1-\frac{z}{2})\cos(\phi) \\ (1-\frac{z}{2})\sin(\phi) \\ (\frac{1}{2}-\frac{z}{4}) \end{pmatrix} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(1-\frac{z}{2}\right)^4 [\cos^4(\phi) + \sin^4(\phi)] + \left(\frac{1}{2}-\frac{z}{4}\right) z^2 \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Ausführen dieses Integrals ergibt den Wert $\Phi = \frac{19}{15}\pi$, wobei man beispielsweise die Rekursion

$$\int \cos^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\sin(x)\cos^{n-1}(x)$$

für $n \geq 2$ verwenden kann.

3. (a) Die Bogenlänge ℓ_n der Kurve $\vec{r}_n$ ist

$$\ell_n = \int_0^1 \|\vec{r}\,'_n(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \|(2\pi n\cos(2\pi nt),\, 2\pi n\sin(2\pi nt),\, 1)\|\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \sqrt{4\pi^2 n^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{4\pi^2 n^2 + 1}$$

(b) Das Arbeitsintegral $W_n = \int \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r}_n$ lässt sich hier ohne Weiteres lösen:

$$W_n = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_n(t)) \bullet \vec{r}\,'_n(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 (\sin 2\pi nt,\, 1 - \cos 2\pi nt,\, te^t) \bullet (2\pi n\cos(2\pi nt),\, 2\pi n\sin(2\pi nt),\, 1)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 (2\pi n\sin(2\pi nt) + te^t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Alternativ kann man feststellen, dass

$$f(x,y,z) := \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + (z-1)e^z$$

ein Potential von $\vec{v}$ ist; somit ist

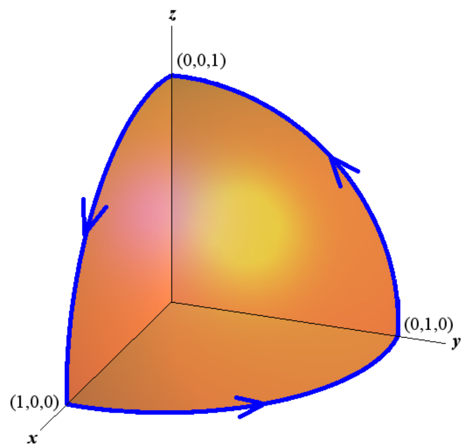
$$W_n = \int \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r}_n = f(0,0,1) - f(0,0,0) = 0 - (-1) = 1.$$

4. (a) $\mathbf{rot}\,\vec{v}(x,y,z) = (-2y, 2x, 2)$.

(b) Sei $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1;\ x,y,z \geq 0\}$ das im ersten Oktanten liegenden Stück der dreidimensionalen Einheitskugel. Der Flächenstück K ist von γ berandet; ausserdem ist

$$\sigma(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\,\cos\theta,\, \sin\varphi\,\cos\theta,\, \sin\theta)$$

mit $\varphi,\, \theta \in [0,\, \pi/2]$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung von K.



Um die Arbeit von $\vec{v}$ langs γ zu bestimmen, können wir also den Satz von Stokes anwenden:

$$W = \int_\gamma \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_K \mathbf{rot}\,\vec{v} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}F,$$

wobei $\vec{n}$ den Einheitsvektor

$$\vec{n}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x,y,z), \quad (x,y,z) \in K$$

bezeichnet — der Vektor $\vec{n}$ ist überall normal zu K und seine Richtung entspricht der Orientierung von γ. Dann gilt

$$W = \int_K \mathbf{rot}\,\vec{v} \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}F = \int_K (-2y, 2x, 2) \bullet (x,y,z)\,\mathrm{d}F = \int_K 2z\,\mathrm{d}F.$$

Für das Flächenelement $\mathrm{d}F$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F &= \|\sigma_\varphi(\varphi,\theta) \times \sigma_\theta(\varphi,\theta)\| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \|(-\sin\varphi\,\cos\theta,\,\cos\varphi\,\cos\theta,\,0) \times (-\cos\varphi\,\sin\theta,\,-\sin\varphi\,\sin\theta,\,\cos\theta)\| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left\|(\cos\varphi\,\cos^2\theta,\,\sin\varphi\,\cos^2\theta,\,\sin\theta\,\cos\theta)\right\| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Hier kann man auch bemerken, dass es sich bei der Parametrisierung σ um die üblichen sphärischen Koordinaten handelt, deren Flächenelement bekannt ist. Also ist die Arbeit

$$W = \int_K 2z\,\mathrm{d}F = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} 2(\sin\theta)\,\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Alternativ erhält man W direkt über das Wegintegral entlang γ. Hierzu parametrisiert man die drei Teilstücke einzeln, beispielsweise den Weg von $(1,0,0)$ nach $(0,1,0)$ durch $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ für $0 \le t \le \pi/2$ und analog die beiden anderen Pfade γ_2, γ_3. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
W &= \int_\gamma \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \int_0^{\pi/2} \vec{v}(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 2\cos(t)\sin(t) \\ 2\sin^2(t)+1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 2\cos(t)\sin(t) \\ \sin(t) \\ 2\cos^2(t)+1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} -\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + 1 - 1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

5. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{v}$ genau dann ein Potentialfeld, wenn

$$\operatorname{rot}\vec{v}\,(x,y,z) = (8-\alpha,\,-5-\gamma,\,3-\beta) = (0,0,0)$$

ist, für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, also wenn $\alpha = 8$, $\beta = 3$ und $\gamma = -5$ sind. In diesem Fall sollte ein Potential $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_x(x,y,z) &=& -3x+3y-5z \\ f_y(x,y,z) &=& 3x+y+8z \\ f_z(x,y,z) &=& -5x+8y+2z \end{array}\right.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$f(x,y,z) = -\frac{3}{2}x^2 + 3xy - 5xz + g(y,z),$$

wobei $g(y,z)$ eine zu bestimmende Funktion $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist. Mit der zweiten Gleichung haben wir

$$f_y(x,y,z) = 3x+y+8z = 3x + g_y(y,z),$$

also $g_y(y,z) = y + 8z$, d.h. $g(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + 8yz + h(z)$. Daraus folgt

$$f(x,y,z) = -\frac{3}{2}x^2 + 3xy - 5xz + \frac{1}{2}y^2 + 8yz + h(z),$$

wobei die Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ noch zu bestimmen ist. Mit der dritten Gleichung

$$f_z(x, y, z) = -5x + 8y + 2z = -5x + 8y + h'(z)$$

ergibt sich $h'(z) = 2z$, also $h(z) = z^2 + C$. Somit ist

$$f(x, y, z) = -\frac{3}{2}x^2 + 3xy - 5xz + \frac{1}{2}y^2 + 8yz + z^2$$

ein Potential des Vektorfeldes $\vec{v}$.

6. (a) Wir wollen die Gleichung $f(x) = x^4 + x^2 + 1 = 0$ für $x \in \mathbb{C}$ lösen. Nach der quadratischen Formel ist

$$x^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pm \frac{2\pi}{3}i}.$$

Wir haben also die vier Nullstellen:

$$x_1 = e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_3 = e^{-\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_4 = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(b) Man soll bemerken, dass $\bar{x}_1 = x_3$ und $\bar{x}_2 = x_4$ sind. Dann sind

$$p(x) := (x - x_1)(x - x_3) = x^2 - x + 1, \quad q(x) := (x - x_2)(x - x_4) = x^2 + x + 1$$

reelle Polynome und $f(x) = p(x)\, q(x)$.
Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{p(x)} + \frac{Cx + D}{q(x)}$$

lässt sich direkt bestimmen, indem man das dazugehörige Gleichungssystem nach A, B, C und D löst. Allerdings vereinfacht sich die Berechnung, wenn man merkt, dass $f'(x)/f(x)$ die Ableitung von $\log |f(x)|$ ist:

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= (\log |f(x)|)' = (\log |p(x)\, q(x)|)' \\ &= (\log |p(x)| + \log |q(x)|)' = \frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{q'(x)}{q(x)} \\ &= \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.\end{aligned}$$

7. Wir leiten die Gleichung der Kurvenschar nach x ab, um die Differentialgleichung der Schar zu bestimmen; man erhält

$$y' = -\frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien ist also

$$y' = -\frac{1}{-\frac{1}{\cosh^2 x}} = \cosh^2 x.$$

Dann ist

$$y = \int \cosh^2 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sinh 2x + C$$

die gesuchte Kurvenschar der Orthogonaltrajektorien.

8. Aus der ersten Gleichung im System folgt, dass $y = \frac{1}{2}(4x - \dot{x})$ ist. Mit der zweiten Gleichung erhält man die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} - 16\dot{x} + 64x = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 16\lambda + 64 = (\lambda - 8)^2$. Somit hat sie eine allgemeine Lösung der Gestalt

$$x(t) = C_1 e^{8t} + C_2 t\, e^{8t}$$

für Konstanten C_1, C_2. Wenn man dies in den Ausdruck für y einsetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\left\{4(C_1 e^{8t} + C_2 t\, e^{8t}) - (8C_1 e^{8t} + C_2\, e^{8t} + 8C_2 t\, e^{8t})\right\} \\ &= \left(-\frac{C_2}{2} - 2C_1\right) e^{8t} - 2C_2 t\, e^{8t}. \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt:

$$x(0) = C_1 = 1, \quad y(0) = -\frac{C_2}{2} - 2C_1 = 0.$$

Daher ist $C_2 = -4C_1 = -4$, und die gesuchten Lösungen sind

$$x(t) = (1 - 4t)e^{8t}, \quad y(t) = 8te^{8t}.$$

9. (a) Nach der geometrischen Reihe ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{1 - (-2)^k\right\} x^k \\ &= 3x - 3x^2 + 9x^3 - 15x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

wenn $|x| < \frac{1}{2}$. Tatsächlich ist $\rho = \frac{1}{2}$ der Konvergenzradius dieser Reihe, denn für $\frac{1}{2} \leq |x| < 1$ ist sie nicht konvergent (sonst müsste

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - f(x)$$

für solche Werte von x konvergieren, ein Widerspruch).

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} x^k = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \cdots.$$

Dann gilt für $|x| < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)e^{-2x} \\ &= (3x - 3x^2 + 9x^3 - 15x^4 + \cdots)\left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \cdots\cdots\right) \\ &= 3x + (-6 - 3)x^2 + (6 + 6 + 9)\, x^3 + (-4 - 6 - 18 - 15)x^4 + \cdots \\ &= 3x - 9x^2 + 21x^3 - 43x^4 + \cdots. \end{aligned}$$

Die Konvergenzradien von f und g sind genau gleich: oben sieht man, da die Exponentialreihe überall konvergiert, dass g für Werte innerhalb des Konvergenzbereiches von f konvergiert; andererseits gilt $f(x) = g(x)e^{2x}$, also konvergiert f, wenn g konvergiert.

10. (a) F, (b) W, (c) W, (d) F, (e) F, (f) F, (g) F, (h) W, (i) W, (j) W