D-MAVT & D-MATL | Analysis I & II | Sommer 2013
Prof. Dr. Paul Biran

Prüfung

Wichtig:

- Die Prüfung dauert **4 Stunden (240 Minuten)**.
- Verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe ein neues Blatt** und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer.
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex.
- Jede Aufgabe (ausser die Aufgabe 1) gibt gleich viele Punkte. Verweilen Sie deshalb nicht allzu lange bei einer Aufgabe, welche Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- **Sämtliche Resultate (ausser bei Aufgabe 1) müssen begründet werden, insbesondere müssen die Lösungswege ersichtlich sein.**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Eine handgeschriebene oder mit dem Computer erzeugte Zusammenfassung von maximal 5 A4 Blättern (Schriftgrösse $\geq$ 12pt).
- Eine Formelsammlung. Zur Auswahl stehen:
  - DMK/DPK/DCK: Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik-Physik-Chemie, Orell Füssli.
  - DMK/DPK: Formeln und Tafeln. Mathematik-Physik, Orell Füssli.
  - Commissions romandes de mathématique, physique et chimie: Formulaires et Tables, Edition du Tricorne.
- Keine weiteren Bücher, keine Taschenrechner und keine Mobiltelefone sind erlaubt.

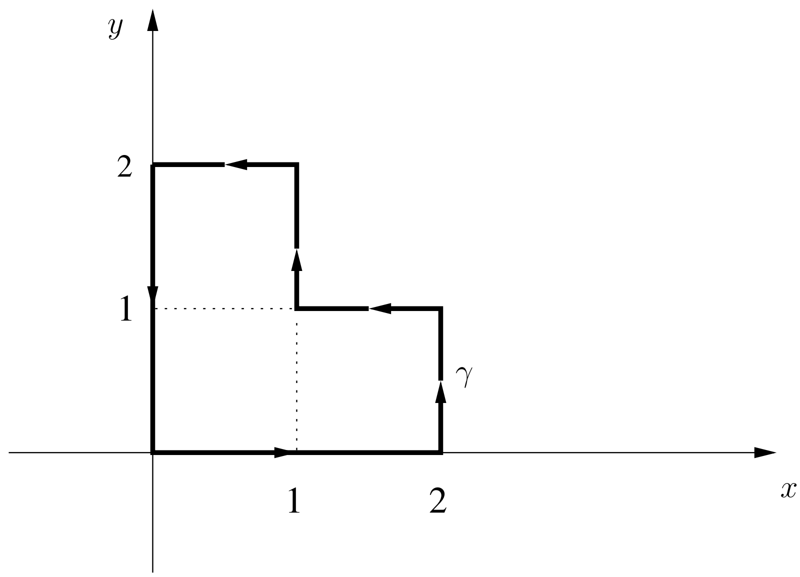
1. **Multiple Choice Aufgabe.** (10 Punkte) Kreuzen Sie entweder W oder F an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage wahr oder falsch ist. Für jedes korrekt angekreuzte Kästchen erhalten Sie einen Punkt, für jedes falsch angekreuzte Kästchen wird ein Punkt abgezogen. Sie erhalten 0 Punkte, wenn Sie keine Antwort ankreuzen. Begründungen sind nicht verlangt.

   (a) Sei $f : (-1\,,1) \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion und $x = 0$ eine lokale Minimalstelle von f.
   W ☐ F ☐ Dann ist $f'(0) = 0$.
   W ☐ F ☐ Dann ist $f''(0) > 0$.

   (b) Betrachten Sie die Differentialgleichung $y''(x) - y'(x) + e^x y(x) = 0$.
   W ☐ F ☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$.
   W ☐ F ☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.
   W ☐ F ☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$ und $y''(0) = -1$.

   (c) Sei z eine komplexe Zahl in der oberen Halbebene
   $$\mathbb{H}_+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) > 0\}.$$
   W ☐ F ☐ Dann ist $i \cdot z$ auch in der oberen Halbebene $\mathbb{H}_+$.
   W ☐ F ☐ Dann ist $\operatorname{Im}(\frac{1}{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.
   W ☐ F ☐ Dann ist $-1/\overline{z}$ auch in der oberen Halbebene $\mathbb{H}_+$.

   (d) Betrachten Sie die Vektorfelder
   $$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2x \\ yx^2 + \cos(y) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2x - y \\ yx^2 + \cos(y) \end{pmatrix}$$
   und die Kurve γ, die aus den in der Figur (1d) gezeigten Geradenstücken besteht (auf der nächsten Seite).



Figur(1d)

W ☐ F ☐ Dann ist $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$.
W ☐ F ☐ Dann ist $\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{r} = 3$.

2. (6 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y' = y^2 + 4xy + 4x^2.$$

3. (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ y \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts

$$Z = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

von innen nach aussen.
Bemerkung: Die Oberfläche besteht aus der ganzen Zylinderoberfläche einschliesslich der Mantelfläche, der Bodenfläche und des Deckels.

4. (6 Punkte) Finden Sie für die Funktion

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(t))\,dt$$

das Taylorpolynom dritten Grades in $x_0 = 0$.

5. (6 Punkte) Sei S ein orientiertes Flächenstück mit Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ und Rand γ, der aus dem Kreis $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ mit Radius R in der xy-Ebene besteht (so durchlaufen, dass mit dem auf S ausgezeichneten Normalenvektor eine Rechtsschraube gebildet wird). Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

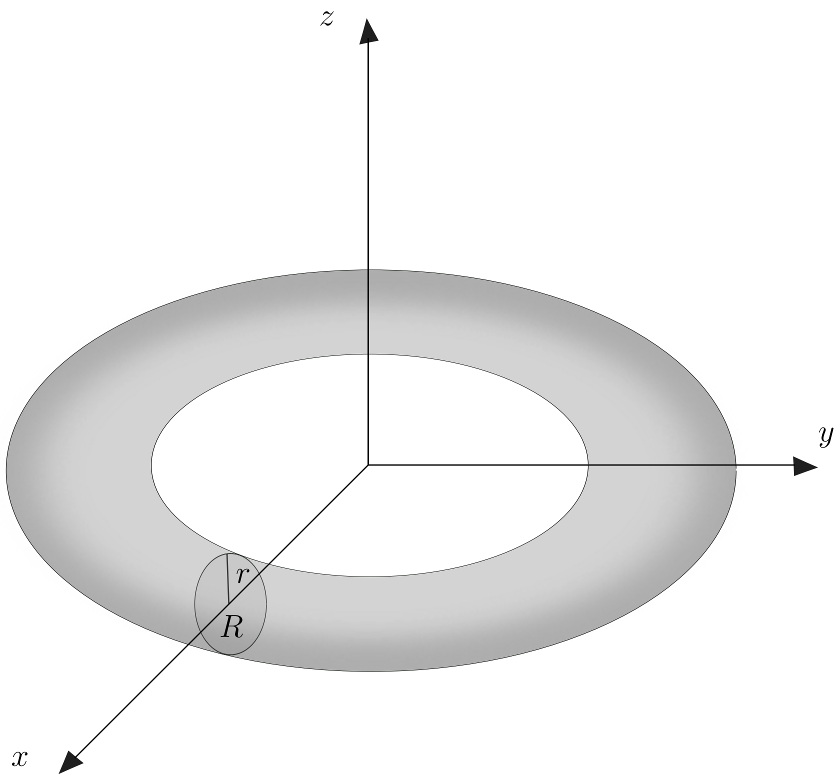
$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\,d\mathcal{O}.$$

6. (6 Punkte) Für $a > 0$ sei P_a die Parabel mit der y-Achse als Symmetrieachse und mit dem Scheitelpunkt $(0, 1)$, die durch den Punkt (a, a) geht. Sei W_a der Weg von $(0, 1)$ nach (a, a) entlang P_a. Man bestimme $a > 0$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y) \longmapsto \left(\frac{y - 1}{x}, \frac{-1}{x} \right)$$

entlang W_a minimal wird.

7. (6 Punkte) Der Torus (oder *Ringfläche*, oder *"Kringel"*) entsteht durch eine Drehung um die z-Achse eines Kreises in der xz-Ebene von Radius r und Mittelpunkt $(R, 0, 0)$, wobei $R > r$ (siehe Abbildung).



(a) Finden Sie eine Parameterdarstellung des Torus.

(b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Torus.

8. (6 Punkte) Gegeben sei das räumliche Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

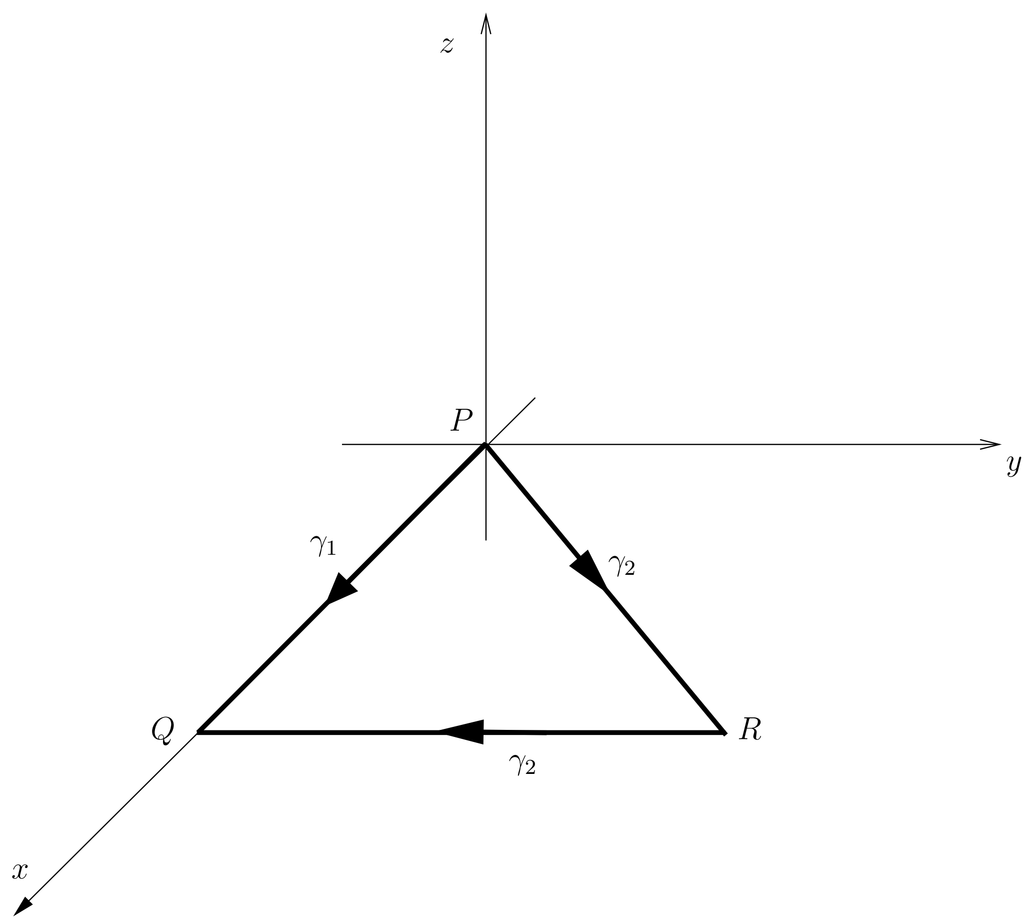
für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot}(\vec{v})$.

(b) Berechnen Sie die Arbeit von $\vec{v}(x, y, z)$ entlang

i. dem Geradenstück γ_1 vom Punkt $P = (0,0,0)$ nach $Q = (1,0,0)$;

ii. dem Weg γ_2, der aus den zwei Geradenstücken vom Punkt $P = (0,0,0)$ nach $R = (1,1,0)$ und vom Punkt $R = (1,1,0)$ nach $Q = (1,0,0)$ besteht.



9. (6 Punkte) Eine inhomogene Kugel mit Radius R und mit Massendichte

$$\rho(r) = 1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

wobei r der Abstand vom Mittelpunkt bezeichnet, rotiert um eine Achse durch den Mittelpunkt.

   (a) Berechnen Sie die Masse der Kugel.

   (b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse.

10. (6 Punkte) Finden Sie die Lösung $(m_1(t), m_2(t))$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} \dot{m}_1 &= -k_1 m_1 \\ \dot{m}_2 &= k_1 m_1 - k_2 m_2, \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung

$$m_1(0) = 1,\; m_2(0) = 0,$$

wobei die Konstanten $k_1, k_2 \in (0, \infty)$ zwei gegebene positive reelle Zahlen mit $k_1 \neq k_2$ sind.

Viel Erfolg!