1. [6 Punkte] (a) Finden Sie eine Rekursionsformel für die Integrale

$$I_n = \int_0^1 r^n e^r \, dr, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Gegeben ist der homogene Körper

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}$$

mit Massendichte 1. Bestimmen Sie die x-Koordinate und die y-Koordinate des Schwerpunktes von B sowie sein Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse.

2. [6 Punkte] Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\alpha\colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve α sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

(b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang α ab. Bestimmen Sie das Zentrum $z(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\alpha(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto z(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

3. [6 Punkte] Man bestimme alle absoluten Extremalstellen und Extrema der Funktion $f\colon (x, y, z) \mapsto \log(1 + x^2) + 2y + 3z$ auf dem Bereich

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 6\}.$$

Hier bezeichnet log den natürlichen Logarithmus. (Hinweis: $\log 2 > \frac{2}{3}$.)

4. [6 Punkte] Berechnen Sie den Fluss von innen nach aussen des Vektorfeldes $\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto (x, y, z^2)$ durch die Oberfläche des Oktaeders

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 2\}.$$

5. [6 Punkte] Gegeben seien das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = (2z - y, z - 2x, x + 2y)$ und der ebene Kreis $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, welcher die Punkte $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ und $C = (0, 0, 3)$ enthält. Bestimmen Sie

(a) $\mathbf{rot}\, \vec{v}$,

(b) den Radius von γ (Hinweis: das Dreieck ABC ist gleichschenklig; verwenden Sie Elementargeometrie),

(c) die Zirkulation von $\vec{v}$ längs γ, wobei die Orientierung von γ so gewählt sei, dass die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge durchlaufen werden.

6. [6 Punkte] Das Polynom $f(x) = x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$ besitzt die komplexe Nullstelle $2e^{i2\pi/3}$.

(a) Schreiben Sie $f(x)$ als ein Produkt $p(x)q(x)$ von zwei Polynomen $p(x)$, $q(x)$ zweiten Grades mit reellen Koeffizienten.

(b) Geben Sie alle komplexen Nullstellen von f in Normalform und in Polarform an.

7. [6 Punkte] Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(1 + \cos x) - y \sin x = 2x, \quad y = y(x), \quad x \in (-\pi, \pi)\,.$$

Bestimmen Sie die Lösung, die der Anfangsbedingung $y(1) = 0$ genügt.

8. [6 Punkte] Bestimmen Sie die Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 \cdot (y')^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y = y(x) > 0,$$

sowie ihre Enveloppen.

9. [6 Punkte] Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f\colon x \mapsto \frac{5}{x^2 + x - 6}$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Wie gross ist ihr Konvergenzradius? (Hinweis: Partialbruchzerlegung).

Die Multiple-Choice-Aufgabe befindet sich auf der Rückseite.

10. [**10 Punkte**] **Multiple-Choice-Aufgabe.** Kreuzen Sie entweder W oder F an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage wahr oder falsch ist. Begründungen sind nicht verlangt. Für jedes korrekt angekreuzte Kästchen erhalten Sie einen Punkt; für jedes falsch angekreuzte Kästchen wird ein Punkt abgezogen; für jede unbeantwortete Frage erhalten Sie 0 Punkte. Die erreichte Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird aber nie negativ sein –wir runden auf 0 auf. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

- Man betrachte eine stetige, strikt monoton wachsende Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

  (a) W ☐ F ☐ Die Funktion $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist konvex.
  (b) W ☐ F ☐ Das Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

- Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $\vec{v} = \mathbf{grad} f$ überall nicht null.

  (c) W ☐ F ☐ Es existiert keine geschlossene Feldlinie von $\vec{v}$.
  (d) W ☐ F ☐ Es existiert keine geschlossene Niveaulinie von f.

- Gegeben sei der Hohlzylinder

  $$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

  sowie die Schar der darin enthaltenen horizontalen Kreise

  $$\gamma_{r,z} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

  für $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq z \leq 1$. Weiter sei $\vec{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf B.

  (e) W ☐ F ☐ Ist die Arbeit von $\vec{v}$ längs jedem der Kreise $\gamma_{r,z}$ gleich null, so ist $\vec{v}$ konservativ.
  (f) W ☐ F ☐ Ist $\vec{v}$ wirbelfrei und ist die Zirkulation von $\vec{v}$ längs des Kreises $\gamma_{1,0}$ gleich null, so ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld.

- Es gibt eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, so dass...

  (g) W ☐ F ☐ e^x, $\sin x$, $\cos x$ Lösungen sind.
  (h) W ☐ F ☐ e^x, $\sinh x$, $\cosh x$ Lösungen sind.

- Die Funktion $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ sei unendlich oft differenzierbar und werde zumindest auf dem Intervall $(0, 1)$ durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{2k}$ dargestellt. Die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0...

  (i) W ☐ F ☐ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$.
  (j) W ☐ F ☐ stellt auf dem Intervall $(-1, 1)$ die Funktion f dar.