1. **[10 Punkte] Multiple-Choice-Aufgabe.** Kreuzen Sie entweder **W** oder **F** an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage **wahr** oder **falsch** ist. Begründungen sind nicht verlangt. Für jedes korrekt angekreuzte Kästchen erhalten Sie einen Punkt; für jedes falsch angekreuzte Kästchen wird ein Punkt abgezogen; für jede unbeantwortete Frage erhalten Sie null Punkte. (Eine negative Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird auf 0 aufgerundet). Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

- Seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen, alle zweimal stetig differenzierbar.

  (a) W ☐ F ☐ Ist g positiv und monoton steigend, und ist f positiv und konvex, so ist $g \cdot f$ wieder konvex.

  (b) W ☐ F ☐ Sind g und h positiv und monoton steigend sowie f monoton fallend, dann ist $f \circ (g \cdot h)$ monoton fallend.

  (c) W ☐ F ☐ Sind f und g beide ungerade, so ist die Ableitung von $f \cdot g$ gerade.

  (d) W ☐ F ☐ Ist f gerade und g ungerade, so ist $f \circ g$ wieder gerade.

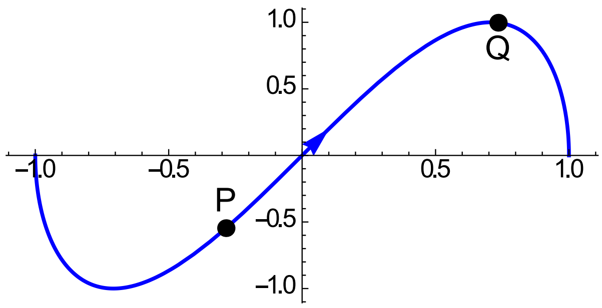
- Sei $\vec{v}$ ein quellenfreies Vektorfeld, welches auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ definiert ist. Sei K_R die Vollkugel vom Radius R, zentriert im Ursprung. Dann gilt:

  (e) W ☐ F ☐ Der Fluss von $\vec{v}$ durch ∂K_R verschwindet.

  (f) W ☐ F ☐ Der Fluss von $\vec{v}$ durch ∂K_R ist unabhängig von R.

  (g) W ☐ F ☐ Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist wirbelfrei.

- Betrachten Sie die Kurve im Bild, die in Pfeilrichtung durchlaufen wird.



  (h) W ☐ F ☐ In den Punkten mit $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ist die Krümmung positiv.

  (i) W ☐ F ☐ Der Absolutwert der Krümmung in P ist grösser als in Q.

- Es sei eine ebene Kurve gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(2t)), \quad \text{für } t \in [0, \pi].$$

  (j) W ☐ F ☐ Dann ist eine explizite Darstellung dieser Kurve gegeben durch $y(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, für $x \in [-1, 1]$.

2. [**6 Punkte**] Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{h^2} t \cdot \ln\left(\frac{1}{t+1}+1\right) \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{2h} t^2 \cdot \sin(t^2+t)\,\mathrm{d}t}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Regel von Bernoulli-Hôpital.

3. [**6 Punkte**] Betrachten Sie die Bernoullispirale, die in Polarkoordinaten durch $\rho = e^{3\phi}$ gegeben ist.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge zwischen den Punkten $(1,0)$ und $(0, e^{\frac{3\pi}{2}})$.

(b) Berechnen Sie die Krümmung der Spirale als eine Funktion von ϕ.

(c) Berechnen Sie die Evolute dieser Spirale (in Parameterdarstellung).

4. [**6 Punkte**] Lösen Sie folgende Differentialgleichung einer reellen Funktion $y(x)$

$$x^2y'' + xy' = \lambda^2 y,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$; für

(a) $\lambda = 0$

(b) $\lambda > 0$.

Hinweis: Substituieren Sie $z(t) := y(e^t)$, also $x = e^t$, und transformieren Sie in eine Differentialgleichung für z. (Benutzen Sie *keinen* Potenzreihenansatz.)

5. [**6 Punkte**]

(a) Für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, und eine beliebiges Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, beweisen Sie die Identität $\mathrm{rot}(f\cdot\vec{v}) = f\cdot\mathrm{rot}(\vec{v}) + \mathrm{grad}(f)\times\vec{v}$.

(b) Es sei nun $\vec{v}(\vec{r}) := -\frac{C}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$ das Gravitationsfeld auf $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$; und die Funktion f sei gegeben durch $f(x,y,z) := 2x^2+2y^2+3z^2$. Es sei

$$S := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4\}$$

die Oberfläche der Kugel mit Radius 2. Es sei $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\gamma(t) := (2\cos(2\pi t), 2\sin(2\pi t), 0)$$

ein Weg, der auf S verläuft. Berechnen Sie die Arbeit, die das Vektorfeld $f\cdot\vec{v}$ entlang des Weges γ leistet.

Bitte wenden!

6. [**6 Punkte**] Betrachten Sie das ebene Vektorfeld $\vec{v}(x,y) := (-4y, 9x)$ und die Feldlinie $y(x)$ von $\vec{v}$, die durch den Punkt $(1,0)$ verläuft.

(a) Finden Sie eine explizite und eine implizite Darstellung dieser Feldlinie (*implizit* bedeutet: eine Gleichung in x und y, welche die Feldlinie erfüllt).

(b) Parametrisieren Sie die Feldlinie als ebene Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$; mit $\gamma(0) = (1,0)$; im Gegenuhrzeigersinn orientiert.

(c) Die Kurve γ beschreibt einen Weg, der wieder zum Anfangspunkt zurückkehrt. Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfelds $\vec{v}$ entlang des Wegs γ, wenn dieser *einmal* durchlaufen wird.

7. [**6 Punkte**] Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ der Graph

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - 2x\}.$$

Für den Punkt $P_0 = (1,0,1)$, finden Sie alle Punkte auf dem Graphen G, welche minimalen Abstand zu P_0 haben, und berechnen Sie diesen Abstand.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass ein globales Minimum existiert – das müssen Sie nicht zeigen.

8. [**6 Punkte**] Betrachten Sie den elliptischen Zylinder

$$Z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Berechnen Sie das Volumen des Teils von Z, welcher oberhalb der Ebene $z = 0$ und unterhalb der Ebene $z = x + y + 3$ liegt.

9. [**6 Punkte**] Rotieren Sie das Dreieck mit den Ecken $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$ um die x-Achse und berechnen Sie das Trägheitsmoment des entstehenden (homogenen) Körpers

(a) bezüglich der x-Achse.

(b) bezüglich der y-Achse.

(c) bezüglich der z-Achse.

10. [**6 Punkte**] Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$G(x) := \int_0^x 2f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finden Sie diejenige Funktion f mit $f(0) = 0$ und

$$G''(x) - G'(x) = e^{2x}.$$