D-MAVT & D-MATL — Analysis I & II — Winter 2014

Prof. Dr. Paul Biran

Prüfung

Wichtig:

- Die Prüfung dauert **4 Stunden (240 Minuten)**.
- Verwenden Sie bitte für **jede Aufgabe ein neues Blatt** und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer.
- Schreiben Sie in blauer oder schwarzer Farbe. Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex.
- Jede Aufgabe (ausser die Aufgabe 1) gibt gleich viele Punkte. Verweilen Sie deshalb nicht allzu lange bei einer Aufgabe, welche Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- **Sämtliche Resultate (ausser bei Aufgabe 1) müssen begründet werden, insbesondere müssen die Lösungswege ersichtlich sein.**

Zugelassene Hilfsmittel:

- Eine handgeschriebene oder mit dem Computer erzeugte Zusammenfassung von maximal 5 A4 Blättern (Schriftgrösse $\geq$ 12pt).
- Eine Formelsammlung. Zur Auswahl stehen:
  - DMK/DPK/DCK: Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik-Physik-Chemie, Orell Füssli.
  - DMK/DPK: Formeln und Tafeln. Mathematik-Physik, Orell Füssli.
  - Commissions romandes de mathématique, physique et chimie: Formulaires et Tables, Edition du Tricorne.
- Keine weiteren Bücher, keine Taschenrechner und keine Mobiltelefone sind erlaubt.

Viel Erfolg!

1. **Multiple-Choice-Aufgabe.** (10 Punkte) Kreuzen Sie entweder W oder F an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage wahr oder falsch ist. Begründungen sind nicht verlangt. Für jedes korrekt angekreuzte Kästchen erhalten Sie einen Punkt; für jedes falsch angekreuzte Kästchen wird ein Punkt abgezogen; für jede unbeantwortete Frage erhalten Sie 0 Punkte. Die erreichte Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird aber nie negativ sein –wir runden auf 0 auf. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

   (a) Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen von erster und zweiter Ordnung. Man nehme an,

   - dass $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ und $f_{xy}(0,0) = 0$ sind, und
   - dass $f_{xx}(0,0)$ und $f_{yy}(0,0)$ ungleich null sind und unterschiedliche Vorzeichen haben.

   W ☐ F ☐ Der Punkt $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f.

   (b) Seien z, $w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen im ersten Quadranten der komplexen Ebene (d.h. $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ und $\mathrm{Re}(w)$, $\mathrm{Im}(w) > 0$).

   W ☐ F ☐ Dann ist $\mathrm{Im}\left(\frac{z}{w}\right) > 0$.

   W ☐ F ☐ Dann ist $\mathrm{Re}(z\bar{w}) > 0$.

   (c) Gegeben seien zwei ungerade, beliebig oft differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Man definiere die Funktion

   $$H : x \longmapsto f(g(x)^{2013}).$$

   W ☐ F ☐ Die Ableitung H' ist ungerade.

   W ☐ F ☐ Die zweite Ableitung H'' ist ungerade.

   W ☐ F ☐ Die Koeffizienten der geraden Potenzen von x in der Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ sind gleich null.

(d) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{f}: (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right).$$

W ☐	F ☐	Der maximale Definitionsbereich von $\vec{f}$ ist $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
W ☐	F ☐	**rot** $\vec{f} = (0,0,0)$.
W ☐	F ☐	Es existiert ein Skalarfeld g auf dem Definitionsbereich von $\vec{f}$, sodass **grad** $g = \vec{f}$ ist.
W ☐	F ☐	$\int_{S^1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, wobei $S^1 = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2=1\}$.

2. (6 Punkte) Ein zweidimensionales Kraftfeld $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung

$$\vec{f}(x, y) = (cxy,\, x^6y^2)$$

gegeben, wobei c eine positive Konstante ist. Die Kraft wirkt auf ein Teilchen, das sich entlang der Kurve

$$y = ax^b \qquad (a,\, b > 0 \text{ Konstanten})$$

vom Ursprung bis zum Punkt mit x-Koordinate 1 bewegt.

(a) Man berechne als Funktion von a, b und c die Arbeit W, welche durch die Kraft $\vec{f}$ am Teilchen verrichtet wird.

(b) Man bestimme einen Wert von a (als Funktion von c), sodass die Arbeit W unabhängig von b ist.

(c) Was ist die Arbeit W in diesem Fall?

3. (6 Punkte) Gesucht ist die Lösung $y = f(x)$ der Differentialgleichung

$$x^2y' = y^2 + 2xy,$$

welche durch den Punkt $(1, 1)$ geht.
Hinweis: Überlegen Sie, welche Substitution diese Gleichung vereinfachen könnte.

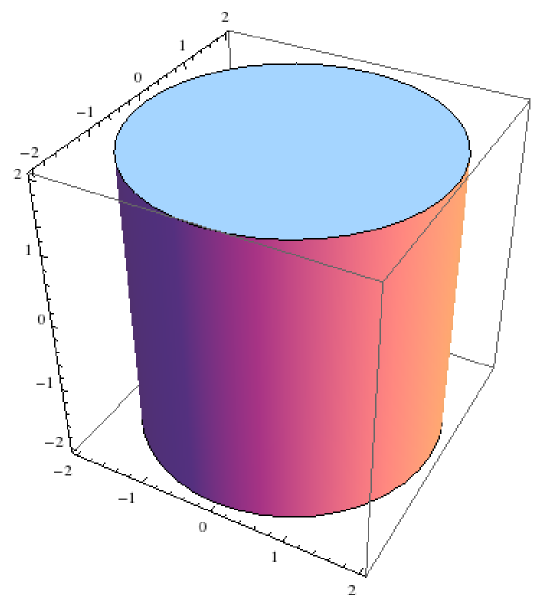
4. (6 Punkte) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^2}{2(1+y^2)} + z\sin y,\ x(e^z - \arctan y),\ ze^{x^2+y^2}\right)$$

durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts

$$Z = \left\{(x,y,z) \mid (x^2+y^2=4\ \&\ |z|<2) \text{ oder } (x^2+y^2 \leq 4\ \&\ |z|=2)\right\}$$

von innen nach aussen.



5. (6 Punkte) Man löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -7x(t) + 4y(t) \\ \dot{y}(t) &= -9x(t) + 5y(t) + e^{-t} \end{cases}$$

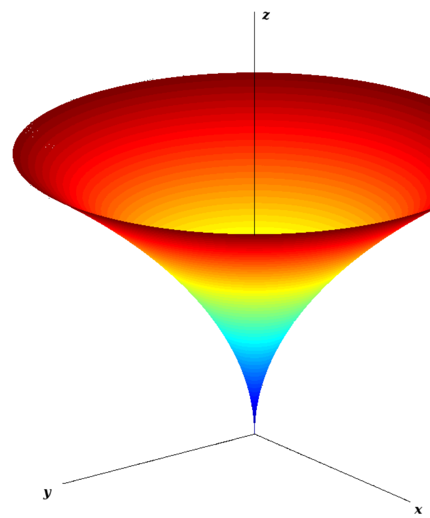
für $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$ unter der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = 0$. *Hinweis:* Durch Elimination einer Funktion ergibt sich aus diesem System eine lineare Differentialgleichung von 2. Ordnung.

6. (6 Punkte) Bestimmen Sie den grössten und den kleinsten Abstand von einem Punkt auf der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ zur geraden Linie $x + y = 4$.

7. (6 Punkte) Die folgende Fläche sei durch die Parameterdarstellung

$$r(u,v) = \left(\left(\frac{u}{3}\right)^2 \cos v,\ \left(\frac{u}{3}\right)^2 \sin v,\ u \right)$$

gegeben, wobei $0 \le u \le 3$ und $0 \le v \le 2\pi$ sind.



Man berechne das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse des homogenen Körpers B mit Dichte 1, der durch diese Fläche begrenzt wird ($z \le 3$).

8. (6 Punkte) Gegeben seien die zwei Kugeln K_1 und K_2, die durch die Gleichungen

$$K_1 : (x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3 \qquad \text{und} \qquad K_2 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

dargestellt werden, wobei c eine reelle Konstante ist. Man bestimme alle Werte von c, sodass die Schnittmenge $K_1 \cap K_2$ nichtleer ist und sodass die entsprechenden Tangentialebenen bezüglich K_1 und bezüglich K_2 an jedem Punkt in dieser Schnittmenge senkrecht zueinander stehen.
Bemerkung: Es lässt sich überprüfen, dass die Schnittmenge $K_1 \cap K_2$ genau dann nichtleer ist, wenn $|c| \le \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ ist. Dies müssen Sie nicht zeigen.

9. (6 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 z,\; z^2,\; x^3 + 2yz).$$

Man berechne die Arbeit von $\vec{F}$ entlang:

(a) dem geschlossenen Weg C_1, der aus drei Geradenstücken besteht: vom Punkt $P = (0, 0, 0)$ nach $Q = (1, 0, 0)$, dann von Q nach $R = (1, 1, 0)$ und von R zurück nach P.

(b) dem Weg C_2, der durch

$$\vec{r}_2(t) = \left(\frac{\ln t}{\ln 2},\; t^{3/2},\; t\cos(\pi t) \right), \qquad 1 \leq t \leq 4,$$

parametrisiert ist.

10. (6 Punkte) Man gebe den ersten nichtverschwindenden Koeffizienten in der Taylorreihenentwicklung um $x_0 = 0$ der Funktion

$$f : x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2} \sin(tx)\, dt$$

an.