1. **[6 Punkte]** Für jedes Paar (a, b) von Parametern im Bereich

$$P = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b^2 + 4 \leq 4a \leq 40\}$$

sei eine Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [(ax^2 + bx + 1)(1 - x)]^{1/4}$, gegeben.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment J des homogenen Rotationskörpers $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ (Massendichte 1) bezüglich der x-Achse, in Abhängigkeit der Parameter a, b.

(b) Für welches Paar $(a, b) \in P$ wird J minimal?

Falls Sie das Resultat von (a) nicht gefunden haben, lösen Sie (b) für $J = a+2b+6$.

2. **[6 Punkte]** Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^2)$ und der Rotationskegel K mit Grundfläche $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ und Spitze $(0, 0, 2)$. Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die Oberfläche von K von innen nach aussen.

3. **[6 Punkte]** Für jede natürliche Zahl n definiert $\vec{r}_n\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\vec{r}_n(t) = (\sin(2\pi nt), 1 - \cos(2\pi nt), t),$$

eine Kurve von $(0, 0, 0)$ nach $(0, 0, 1)$.

(a) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\vec{r}_n$.

(b) Welche Arbeit leistet das Vektorfeld $\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto (x, y, ze^z)$ entlang der Kurve $\vec{r}_n$?

4. **[6 Punkte]** Der geschlossene Weg γ besteht aus drei Viertelkreisen mit Zentrum im Ursprung, die die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ paarweise verbinden. Die Orientierung sei so gewählt, dass die drei Punkte in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden. Weiter sei das Vektorfeld $\vec{v}\colon (x, y, z) \mapsto (2xz - y, 2yz + x, 2z^2 + 1)$ gegeben. Man berechne

(a) die Rotation von $\vec{v}$ sowie

(b) die Arbeit, die das Vektorfeld $\vec{v}$ entlang γ leistet.

5. **[6 Punkte]** Das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = (-3x + \beta y - 5z,\ 3x + y + \alpha z,\ \gamma x + 8y + 2z)\,.$$

Gibt es reelle Zahlen α, β, γ, so dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist? Falls ja, gebe man ein entsprechendes Potential f an.

6. [6 Punkte]

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ in Normalform $a + bi$.

(b) Zerlegen Sie $f(x)$ in ein Produkt $f(x) = p(x)q(x)$ von zwei quadratischen Polynomen $p(x), q(x)$ mit reellen Koeffizienten und bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{p(x)} + \frac{Cx + D}{q(x)} \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R})$$

von $f'(x)/f(x)$, wobei f' die Ableitung von f bezeichnet.

7. [6 Punkte] Man bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$y = C - \tanh x \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

8. [6 Punkte] Man bestimme die Funktionen $x : t \mapsto x(t)$, $y : t \mapsto y(t)$, welche dem Differentialgleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 4x - 2y \\ \dot{y} & = & 8x + 12y \end{array} \right.$$

genügen und die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllen.

9. [6 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : x \longmapsto \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, sowie ihren Konvergenzradius.

(b) Mithilfe von (a) bestimme man die ersten vier nichtverschwindenden Koeffizienten der Taylorreihe der Funktion

$$g : x \longmapsto f(x)e^{-2x}$$

um $x_0 = 0$. Ändert sich der Konvergenzradius?

10. **[10 Punkte] Multiple-Choice-Aufgabe.** Kreuzen Sie entweder W oder F an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage wahr oder falsch ist. Begründungen sind nicht verlangt. Für jedes korrekt angekreuzte Kästchen erhalten Sie einen Punkt; für jedes falsch angekreuzte Kästchen wird ein Punkt abgezogen; für jede unbeantwortete Frage erhalten Sie 0 Punkte. Die erreichte Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird aber nie negativ sein – wir runden auf 0 auf. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

- Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x+x^a}\,\mathrm{d}x$

  (a) W ☐ F ☐ konvergiert für alle a mit $0 < a < 1$.
  (b) W ☐ F ☐ divergiert für alle $a < 0$.

- Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, und ihre partiellen Ableitungen f_x und f_y seien nirgends null.

  (c) W ☐ F ☐ Die Feldlinien des Vektorfelds $\vec{v}\colon (x,y) \mapsto (-f_y(x,y), f_x(x,y))$ verlaufen entlang der Niveaulinien von f.
  (d) W ☐ F ☐ f ist unbeschränkt.

- Gegeben sei das auf ganz $\mathbb{R}^3$ definierte Vektorfeld $\vec{v}\colon (x,y,z) \mapsto (-y, x, z)$.

  (e) W ☐ F ☐ $\vec{v}$ ist ein Potentialfeld.
  (f) W ☐ F ☐ Es existiert ein Vektorfeld $\vec{w}$ auf $\mathbb{R}^3$ mit rot $\vec{w} = \vec{v}$.

- Für eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten a und b gilt stets:

  (g) W ☐ F ☐ Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.
  (h) W ☐ F ☐ Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $p(x)e^x$ für ein Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 2.

- Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) = \int_x^y f(t+y)\,\mathrm{d}t$.

  (i) W ☐ F ☐ Ist (x,y) eine lokale Extremalstelle von F, so gilt $f(x+y) = 0$.
  (j) W ☐ F ☐ Die partielle Ableitung von F nach y ist gegeben durch $F_y(x,y) = 2f(2y) - f(x+y)$.