1. [10 Punkte] Multiple-Choice-Aufgabe.
Kreuzen Sie entweder **W** oder **F** an, je nachdem, ob die entsprechende Aussage **wahr** oder **falsch** ist. Begründungen sind nicht verlangt. Für jedes korrekt angekreuzte Kästchen erhalten Sie einen Punkt; für jedes falsch angekreuzte Kästchen wird ein Punkt abgezogen; für jede unbeantwortete Frage erhalten Sie null Punkte. (Eine negative Gesamtpunktzahl in dieser Aufgabe wird auf 0 aufgerundet.) Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

- Sei $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Vektor. Wir definieren das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $\vec{v}(\vec{r}) := \vec{\omega} \times \vec{r}$. Dann gilt immer:

  (a) W ☐ F ☐ $\vec{v}$ ist quellenfrei.

  (b) W ☐ F ☐ $\vec{v}$ ist wirbelfrei.

  (c) W ☐ F ☐ Sei L die Gerade durch den Ursprung in Richtung $\vec{\omega}$, und sei Z ein Kreiszylinder mit Symmetrieachse L. Dann ist der Fluss von $\vec{v}$ durch die Oberfläche von Z gleich Null.

- Die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y'' - 3y' + 2y = x + 1$ existiert *und* ist eindeutig für die Anfangsbedingungen...

  (d) W ☐ F ☐ $y(0) = 0$.

  (e) W ☐ F ☐ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

  (f) W ☐ F ☐ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 4$.

- Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x) = -f(2 - x)$ erfüllt. Für jedes solche f gilt:

  (g) W ☐ F ☐ Die Taylorreihe von f mit Mittelpunkt $x_0 = 0$ hat nur Terme mit geradem Index/Exponent.

  (h) W ☐ F ☐ Die Taylorreihe von f mit Mittelpunkt $x_0 = 1$ hat nur Terme mit geradem Index/Exponent.

- Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten das Gradientenvektorfeld $\vec{v} = \mathrm{grad}(f)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
  Es sei $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ eine Feldlinie des Vektorfelds $\vec{v}$, für $0 \le t \le 1$. Es seien $P_0 := \vec{r}(0)$ bzw. $P_1 := \vec{r}(1)$ der Anfangs- bzw. Endpunkt der Kurve $\vec{r}(t)$.

  (i) W ☐ F ☐ Es gilt immer $f(P_0) \le f(P_1)$.

  (j) W ☐ F ☐ Falls $f(P_0) = f(P_1)$, so ist die Kurve $\vec{r}(t)$ konstant und es gilt $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$.

2. [**6 Punkte**]

(a) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\,.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_6^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x+15}\,.$$

3. [**6 Punkte**] Es seien $a, b > 0$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := (ax^2+by^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}\,.$$

Finden Sie die globalen Maxima und Minima von f für

(a) $a > b$.

(b) $a = b = 1$.

Hinweis: Die Funktion f flacht im Unendlichen zu Null ab.

4. [**6 Punkte**]

(a) Bestimmen Sie die implizite Darstellung der Kurvenschar aller Kreise, die zur x-Achse im Punkt $(0,0)$ tangential sind.

(b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien zu der Schar aus **(a)**.

(c) Um welche geometrischen Objekte handelt es sich nun? Beschreiben Sie die neue Kurvenschar in Worten möglichst genau.

5. [**6 Punkte**] Für ein festes $a \in \mathbb{R}$ definieren wir $f(x,y) := \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ay^2$.

(a) Bestimmen Sie die Feldlinien des Gradientenfelds $\vec{v} = \mathrm{grad}(f)$ in expliziter Darstellung $y = y(x)$.

(b) Finden Sie diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für welche alle Feldlinien von $\vec{v}$ Geraden sind.

(c) Es sei nun $a = -2$. Finden Sie die Feldlinie von $\vec{v}$, die durch den Punkt $(1,1)$ läuft; und bestimmen Sie die Krümmung der Feldlinie an diesem Punkt.

6. [**6 Punkte**] Wir betrachten den Zylinder

$$Z = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Berechnen Sie das Volumen des Teils von Z, welcher zwischen der Ebene $z = 0$ und dem Paraboloid

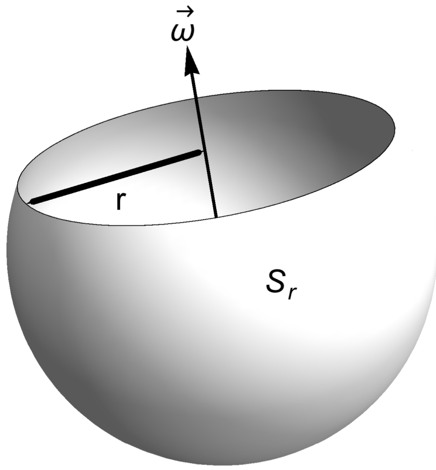
$$P = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = x^2+y^2\right\}$$

liegt.

7. **[6 Punkte]** Es sei $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Vektor (nicht Null). Wir schneiden von der Oberfläche der Einheitskugel eine Kappe ab mit Symmetrieachse $\vec{\omega}$ und Radius r; die entstehende Fläche nennen wir S_r. In Abhängigkeit von $\vec{\omega}$ und r, berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{S_r} \vec{\omega} \bullet \vec{n} \, \mathrm{d}\mathcal{O} \, .$$

Dabei bezeichnet $\vec{n}$ den nach aussen zeigenden Normaleneinheitsvektor auf der Oberfläche S_r.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Gauss.



8. **[6 Punkte]** Wir betrachten den halben Kreisring (homogen mit Dichte 1)

$$K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, \ y \geq 0\} \, .$$

Dabei ist $0 \leq r \leq 1$ der innere Radius.

(a) Berechnen Sie den Schwerpunkt von K_r in Abhängigkeit von r.

(b) Liegt der Schwerpunkt für $r = \frac{1}{2}$ innerhalb oder ausserhalb des Kreisrings?
Hinweis für **(b)**: $\pi \approx 3.14159$.

9. **[6 Punkte]** Sei $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, eine ebene Kurve. Sie sei nach Bogenlänge parametrisiert, d. h. die Geschwindigkeit $|\dot{\vec{r}}(t)|$ ist überall gleich 1.

(a) Die Kurve soll überall Krümmung gleich Null haben. Schreiben Sie diese Bedingung auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(b) Aus **(a)** erhalten Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $(x(t), y(t))$. Lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (1, 2)$, $\dot{\vec{r}}(0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(c) Stellen Sie die Lösungskurve aus **(b)** explizit als $y = y(x)$ dar.

10. **[6 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass die Identität

$$\operatorname{div}(f \cdot \vec{v}) = f \cdot \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \bullet \operatorname{grad}(f)$$

für jedes Vektorfeld $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$ und jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gültig ist.

(b) Es sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ irgendein quellenfreies Vektorfeld; es sei B das Ellipsoid

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\} \, ;$$

und es sei f die Funktion $f(x, y, z) := 2x^2 + 2y^2 + 4z^2$ auf $\mathbb{R}^3$.
Berechnen Sie folgendes Volumenintegral in Abhängigkeit von $\vec{v}$:

$$\iiint_B \vec{v} \bullet \operatorname{grad}(f) \, \mathrm{d}V \, .$$

Hinweis für **(b)**: Wenden Sie den Satz von Gauss zweimal an.