Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 1

Aufgabe 1.1 Der Realteil, der Imaginärteil und das Argument

Bestimme Realteil, Imaginärteil, Absolutbetrag und Argument folgender komplexer Zahlen:

i) $(1+\mathrm{i})^2$

ii) $\frac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$

iii) $2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

iv) $5\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}$

Aufgabe 1.2 Einige Skizzen

Skizziere folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

(1.2a) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 < |z| < 2,\ \operatorname{Re} z < \frac{3}{2}\right\}$

(1.2b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 5\} \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + 5\mathrm{i}| > 5\}$

(1.2c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$

(1.2d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z^2) > 1\}$

Aufgabe 1.3 Die stereographische Projektion

(1.3a) Bestimme die Umkehrabbildung $\Psi : \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\} \to \mathbb{C}$ der stereographischen Projektion $\Phi : \mathbb{C} \to \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\}$. Hier bezeichne $\mathcal{S}^2$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbf{N}$ den Nordpol.

(1.3b) Betrachte den Weg $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{C}$, der durch $\gamma(t) = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gegeben ist. Skizziere $\Phi(\gamma(t))$ für $t > 0$.

Aufgabe 1.4 Kreise auf der Sphäre und die stereographische Projektion

Der Schnitt einer Ebene mit der Sphäre ist ein Kreis $K \subset \mathcal{S}^2$. Sei $\Psi : \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\} \to \mathbb{C}$ die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion. Zeige, dass $\Psi(K \setminus \{\mathbf{N}\})$ ein Kreis oder eine Gerade in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist.

Publiziert am 29. Februar.

Einzureichen am 9./10. März.

Letzte Modifikation: 28. Februar 2016