Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 10

Aufgabe 10.1

Entwickle
$$f(z) := \frac{4z - z^2}{(z^2-4)(z+1)}$$
in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe.

(10.1a) $A_{1,2}(0)$

(10.1b) $A_{2,\infty}(0)$

(10.1c) $A_{0,1}(-1)$

HINWEIS: Finde zuerst die Partialbruchzerlegung von f.

Aufgabe 10.2

Sei $c \in \mathbb{C}$ ein Punkt in der oberen Halbebene, dass bedeutet $\operatorname{Im} c > 0$ und
$$f(z) := \frac{1}{z^2+1}.$$
Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um c.

Aufgabe 10.3

(10.3a) Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, für $k \in \mathbb{N}_0$. Bestimme das Integral
$$\int_{|z|=r} \tan(z)\,\mathrm{d}z.$$

(10.3b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne
$$\int_0^{2\pi} (\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t.$$

HINWEIS: Benutze die binomische Reihe.

Aufgabe 10.4 Das Schwarzsche Lemma

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Wir betrachten eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$.

(10.4a) Da $z_0 = 0$ eine Nullstelle von f ist, lässt sich f schreiben als $f(z) = zg(z)$, wobei g ebenfalls holomorph ist. Zeige
$$|g(z)| \leq 1, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

HINWEIS: Für $r < 1$ gilt $\max_{|z|=r}|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. Dann lasse $r \to 1$ gehen.

(10.4b) Schliesse aus dem Maximumprinzip das Schwarzsche Lemma:

Gilt $|f'(0)| = 1$ oder $|f(c)| = |c|$, für ein $c \in \mathbb{D}$, so ist

$$f(z) = a \cdot z,$$

für ein $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$.

HINWEIS: In beiden Fällen folgt $g = \text{const}$.

Publiziert am 9.Mai.

Einzureichen am 18./19. Mai.

Letzte Modifikation: 9. Mai 2016