Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 11

Aufgabe 11.1 Die Sinus-Cosinus-Form der Fourierreihe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion. Setze

$$a_k = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi k t)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 0, 1, \ldots$$
$$b_k = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sin(2\pi k t)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(11.1a) Zeige

$$a_k = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$
$$b_k = \mathrm{i}(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

HINWEIS: Wenn f 1-periodisch ist, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}$, dass $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{c+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(11.1b) Zeige

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t) + b_k \sin(2\pi k t).$$

(11.1c) Ist f gerade, so gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und ist f ungerade, so gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 11.2

Stelle folgende Funktionen als Fourierreihe in der Sinus-Cosinus-Form dar.

HINWEIS: Verwende Aufgabe (11.1c).

(11.2a) Betrachte die Fortsetzung mit Periode 1 von

$$f(t) := |t|, \qquad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

(11.2b) Betrachte die Fortsetzung mit Periode 1 von

$$g(t) := \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & t = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} < t < 0 \end{cases}.$$

(11.2c) Plotte die Funktionen

$$S_n f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi k t) + b_k \sin(2\pi k t),$$

für $n = 1, 3, 5, 19$, und analog für $S_n g$.

Aufgabe 11.3 Phasenverschiebung und Faltungsprodukt

(11.3a) Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion. Dann gilt, dass für beliebiges $c \in \mathbb{R}$

$$g(t) := f(t + c)$$

eine 1-periodische Funktion ist. Verifiziere

$$\widehat{g}(n) = \mathrm{e}^{2\pi inc}\widehat{f}(n).$$

(11.3b) Für zwei 1-periodische Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieren wir das *Faltungsprodukt* durch

$$(f \star g)(x) := \int_0^1 f(t)g(x - t)\,\mathrm{d}t.$$

Rechne nach, dass

$$\widehat{(f \star g)}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$$

gilt.

Aufgabe 11.4

Berechne die Fourierdarstellung von

$$\frac{1}{\cos(2\pi z)}$$

einerseits für $\operatorname{Im} z > 0$ und andererseits für $\operatorname{Im} z < 0$.

Publiziert am 16.Mai.

Einzureichen am 25./26. Mai.

Letzte Modifikation: 16. Mai 2016