Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 12

Aufgabe 12.1 Der Dirichlet-Kern

In der Vorlesung wurder der N-te Dirichlet-Kern als

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx}$$

eingeführt, wobei $N \in \mathbb{N}$.

(12.1a) Zeige

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(2\pi\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right)}.$$

HINWEIS: Bemerke

$$D_N(x) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} Nx} \sum_{k=0}^{2N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx}$$

und verwende die Summenformel für geometrische Folgen.

(12.1b) Bestimme die Fourierkoeffizienten $\widehat{D_N}(k)$ des Dirichlet-Kerns.

(12.1c) Schliesse aus (12.1b) und Aufgabe 3 aus Serie 11, dass

$$(f \star D_N)(x) = S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx}$$

gilt, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion ist.

(12.1d) Plotte den Dirichlet-Kern für $N = 2, 5, 7, 15$.

Aufgabe 12.2 Fouriertheorie mit allgemeiner positiver Periode

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine ω-periodische Funktion, wobei $\omega > 0$.

(12.2a) Definiere

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{\omega} kt} \, \mathrm{d}t$$

und zeige, dass die Funktionen $e_n(t) := \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{\omega} nt}$ ein orthonormales System bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle_{\omega} := \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t$$

bilden.

(12.2b) Finde explizite Formeln für die Koeffizienten a_k, $k \geq 0$ und b_k, $k \geq 1$, so dass f die Cosinus-Sinus Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{\omega} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{\omega} x\right)$$

hat.

(12.2c) Zeige die folgenden Aussagen für $k, n \in \mathbb{N}$:

i) Es gilt

$$\frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n}{\omega} t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{\omega} t\right) \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

ii) Es gilt

$$\frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{\omega} t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{\omega} t\right) \mathrm{d}t = 0.$$

iii) Es gilt

$$\frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{\omega} t\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{\omega} t\right) \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

HINWEIS: Zeige zuerst die Formeln

- $2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$,
- $2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

Verwende dies dann.

Aufgabe 12.3

(12.3a) Berechne die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(x) := \mathrm{e}^{ax}, \qquad 0 \leq x < 2\pi,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(12.3b) Finde mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung Formeln für

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + a^2)^2}.$$

Aufgabe 12.4 Partialbruchzerlegung des Cotangens und Sinusprodukt

Sei $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ eine nicht ganze, reelle Zahl.

(12.4a) Berechne die Cosinus-Sinus Reihe von

$$f(x) := \cos(zx), \qquad -\pi \leq x < \pi.$$

(12.4b) Schliesse aus (12.4a), dass

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right).$$

(12.4c) Folgere aus (12.4b) das Eulersche Sinusprodukt

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right). \tag{12.4.1}$$

HINWEIS: Setze

$$F(x) = \ln\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right), \qquad x \in (-1,1) \setminus \{0\}$$

und zeige $F'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}$ mit Hilfe von (12.4b).

Publiziert am 23.Mai.

Einzureichen am 1./2. Juni.

Letzte Modifikation: 23. Mai 2016