Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 2

Aufgabe 2.1 Ableitungsregeln

Berechne die komplexe Ableitung von:

(2.1a) $p(z) = z^6 + 5z^3 + 2$

(2.1b) $q(z) = \mathrm{e}^{\alpha z}$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$.

(2.1c) $r(z) = \sin(z^2)$, wobei $\sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$.

(2.1d) $s(z) = \sin(z) \cdot \cos(z)$

Aufgabe 2.2 Möbiustransformationen - Teil I

Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

eine Matrix mit Determinante $\det M := ad - bc = 1$.

(2.2a) Bestimme den Definitionsbereich der Funktion

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(2.2b) Bestimme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z)$.

(2.2c) Erweitere f zu einer Funktion $\widehat{f} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(2.2d) Bestimme die Umkehrfunktion von $\widehat{f}$.

Aufgabe 2.3 Möbiustransformationen - Teil II

Seien

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

komplexe 2×2-Matrizen mit Determinante $\det M = 1 = \det N$. Weiter seien f_M und f_N die zugehörigen Möbiustransformationen

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad f_N(z) = \frac{ez + f}{gz + h}.$$

(2.3a) Rechne nach, dass

$$f_M \circ f_N(z) = f_M(f_N(z)) = f_{M \cdot N}(z)$$

gilt. Hier bezeichnet $M \cdot N$ das Matrixprodukt.

(2.3b) Verifiziere $(f_M)^{-1} = f_{M^{-1}}$.

Aufgabe 2.4 Kreisinversion als Rotation der Sphäre

(2.4a) Verifiziere, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{wenn } z \neq 0 \text{ und } z \neq \infty \\ 0 & \text{wenn } z = \infty \\ \infty & \text{wenn } z = 0 \end{cases}$$

unter der stereographischen Projektion einer Drehung der Einheitssphäre um $180°$ um die x-Achse entspricht.

(2.4b) Zeichne das Bild des Einheitsquadrates $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + \mathrm{i}y,\ \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ unter der Abbildung f, die in Aufgabe (2.4a) definiert ist.

Publiziert am 7. März.

Einzureichen am 16./17. März.

Letzte Modifikation: 7. März 2016