Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 3

Aufgabe 3.1 Die reellen Cauchy-Riemann Gleichungen

Die Cauchy-Riemann Gleichung $\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}f(x+\mathrm{i}y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x+\mathrm{i}y)$ wird häufig in folgender reeller Form hingeschrieben: Man spaltet $f(x+\mathrm{i}y) = u(x+\mathrm{i}y) + \mathrm{i}v(x+\mathrm{i}y)$ in Real- und Imaginärteil auf und schreibt

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v, \qquad \frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v.$$

Welche der folgenden Funktionen erfüllen die reellen Cauchy-Riemann Gleichungen?

(3.1a) $f(x+\mathrm{i}y) := x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy.$

(3.1b) $g(x+\mathrm{i}y) := -x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}xy.$

(3.1c) $h(x+\mathrm{i}y) := \frac{x^2+y^2}{x-\mathrm{i}y}.$

Aufgabe 3.2 Die Komplexen Zahlen als Matrizen

Identifiziere $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ mit der Matrix

$$M_z := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Seien nun $z, w \in \mathbb{C}$. Rechne nach:

(3.2a) $M_z + M_w = M_{z+w}.$

(3.2b) $M_z \cdot M_w = M_{z\cdot w}.$

(3.2c) $M_z^\top = M_{\overline{z}}.$

(3.2d) Interpretiere die Spur und die Determinante von M_z.

(3.2e) Rechne nach, dass die Matrix M_z für $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ einer Drehstreckung entspricht.

Aufgabe 3.3 Potenzreihen

Stelle die folgenden Funktionen als Potenzreihen dar und bestimme ihren Konvergenzradius.

(3.3a) $f(z) := \frac{1}{(1-z)^2}.$

(3.3b) $g(z) := -\frac{2z}{(1+z^2)^2}.$

HINWEIS: Die Funktionen sind Ableitungen von Funktionen, deren Potenzreihen einfach ju bestimmen sind.

Aufgabe 3.4 Das Wirtinger Kalkül

Die Wirtinger-Ableitung $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ erlaubt es uns, die Cauchy-Riemann Gleichungen als

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 0$$

zusammenzufassen.

Berechne die Wirtinger-Ableitung der folgenden Funktionen einerseits durch direktes Ableiten nach der Variable $\overline{z}$ und andererseits durch Einsetzen in die Definition der Wirtinger-Ableitung.

(3.4a) $f(z) := z$,

(3.4b) $g(z) := \overline{z}$,

(3.4c) $h(z) = |z|^2 = z\overline{z}$,

Publiziert am 14. März.

Einzureichen am 23./24. März.

Letzte Modifikation: 17. März 2016