Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 4

Aufgabe 4.1 Die Umlaufzahl

(4.1a) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $r > 0$. Parametrisiere den Weg γ_k, der z_0 im Abstand r k-mal umläuft.

(4.1b) Berechne

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z. \tag{4.1.1}$$

Aufgabe 4.2 Das Wegintegral der Konjugierten

Berechne

$$\int_\gamma \overline{z} \, \mathrm{d}z \tag{4.2.1}$$

für die folgenden Wege:

(4.2a) Der Kreis mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

(4.2b) Der Rand eines achsenparallelen Rechtecks mit Länge $a > 0$ und Breite $b > 0$.

(4.2c) Was beschreibt $\int_\gamma \overline{z} \, \mathrm{d}z$ für einen allgemeinen geschlossenen Weg γ?

Aufgabe 4.3 Das Wegintegral ist unabhängig von der Parametrisierung

(4.3a) Sei $\gamma : [c, d] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $\sigma : [a, b] \to [c, d]$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung mit $\sigma(a) = c$ und $\sigma(b) = d$. Verifiziere, dass

$$\int_{\gamma \circ \sigma} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z.$$

HINWEIS: Benutze die Substitutionsformel.

(4.3b) Wenn $|f(z)| \leq C$, für alle z auf dem Weg γ, so gilt

$$\left| \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq C \cdot L(\gamma),$$

wobei $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t$ die Länge des Weges γ bezeichnet.

Aufgabe 4.4 Der kleine Residuensatz

(4.4a) Sei $f \colon B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die als *Laurentreihe* um z_0 dargestellt werden kann, d.h.,

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit (gleichmässig) konvergenter Reihe für $\varepsilon < |z - z_0| < R - \varepsilon$. Für $r < R$ gilt dann

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \cdot a_{-1}$$

(4.4b) Ist $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ um z_0 als Potenzreihe mit Konvergenzradius R darstellbar, so gilt für $0 < r < R$ die Cauchy-Integralformel

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z.$$

Publiziert am 21. März.

Einzureichen am 6./7. April.

Letzte Modifikation: 20. März 2016