Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 5

Aufgabe 5.1 Cauchy-Integralformel

Berechne:

(5.1a)

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)(z-3)^2}\,\mathrm{d}z$$

(5.1b)

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$$

(5.1c)

$$\int_{|z+2\mathrm{i}|=2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

(5.1d)

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z$$

Aufgabe 5.2 Zwei Reihendarstellungen

Fixiere $z_0 \in \mathbb{C}$ und zeige für w, $z \in \mathbb{C}$:

(5.2a) Falls $|z-z_0| < |w-z_0|$ so gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$

(5.2b) Falls $|z-z_0| > |w-z_0|$ so gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n.$$

Aufgabe 5.3 Eine Potenzreihenentwicklung

Finde die Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$$

um $z_0 = 0$ für $|z| < 1$.

HINWEIS: Benutze eine Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 5.4 Unterschiede zwischen reeller und komplexer Analysis

Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine holomorphe Funktion als Potenzreihe darstellbar ist und man sie somit beliebig oft differenzieren kann. Zeige die folgenden beiden Aussagen.

(5.4a) Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar. Berechne die Ableitung und zeige, dass $f''(0)$ nicht existiert.

(5.4b) Die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

ist in $x = 0$ beliebig oft differenzierbar. Es gilt aber

$$g(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

für $x > 0$.

HINWEIS: Verwende, dass

$$\lim_{x \to \infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

gilt.

Publiziert am 4. April.

Einzureichen am 13./14. April.

Letzte Modifikation: 4. April 2016