Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 6

Aufgabe 6.1 Die Cauchy Integralformel

Bestimme den Wert des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m (z-b)^n},$$

für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1 < |b|$ und $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6.2 Harmonische Funktionen

Der Laplace-Operator Δ für Funktionen $f(x, y)$ zweier reeller Veränderlicher ist gegeben durch

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f.$$

Wir nennen eine Funktion f *harmonisch*, wenn für alle x, y

$$\Delta f(x, y) = 0$$

gilt. Zeige:

(6.2a) Ist f holomorph, so ist f auch harmonisch.

(6.2b) Mit $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ gilt

$$\Delta f = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f.$$

Verwende dies, um Aufgabe (6.2a) noch einmal zu lösen.

(6.2c) $f(z) := \overline{z}$ ist harmonisch, aber nicht holomorph.

(6.2d) Ist f harmonisch, so sind es auch $\overline{f}$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$.

(6.2e) $f(x, y) := x^2 - y^2$ ist harmonisch. Desweiteren ist f der Realteil einer holomorphen Funktion.

(6.2f) $g(x, y) := x^2 + y^2$ ist nicht der Realteil einer holomorphen Funktion.

Aufgabe 6.3 Elliptische Funktionen und der Satz von Liouville

Eine Funktion f heisst *elliptisch*, falls es $\omega_1 \neq 0$ und $\omega_2 \neq 0$ gibt mit $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, sodass

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2), \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Wir nennen ω_1 und ω_2 die *Perioden* von f. Zeige:

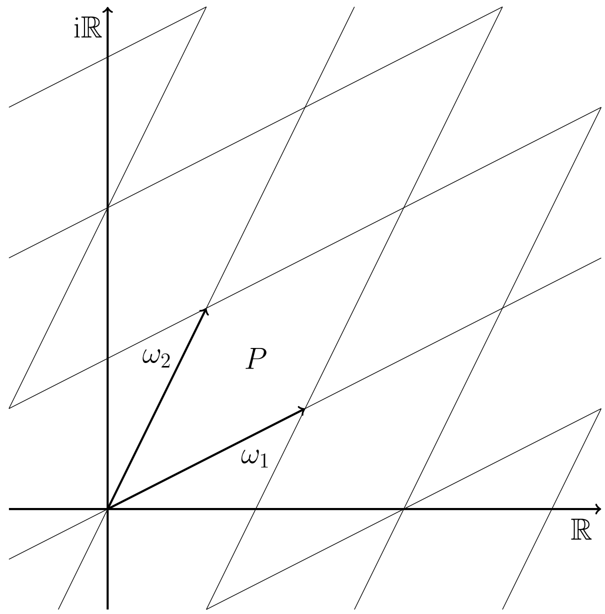

Abbildung 6.1: P und dessen Translate überdecken $\mathbb{C}$.

(6.3a) Eine elliptische Funktion ist durch ihre Werte auf dem Parallelogramm

$$P := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = s\omega_1 + t\omega_2,\ 0 \leq s, t \leq 1\}$$

bestimmt (siehe Abbildung 6.1).

(6.3b) Jede ganze elliptische Funktion ist konstant.

Aufgabe 6.4 Die Weierstrass $\wp$-Funktion

Seien $\omega_1 \neq 0 \neq \omega_2$ und $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right).$$

(6.4a) Rechne nach, dass $\wp$ elliptisch mit den Perioden ω_1 und ω_2 ist.

Hinweis: Die Konvergenz der Summe über $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ darf man ohne Beweis annehmen.

(6.4b) Bestimme die Pole von $\wp$ und deren Vielfachkeit.

Publiziert am 11.April.

Einzureichen am 20./21. April.

Letzte Modifikation: 28. April 2016