Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 8

Aufgabe 8.1 Umlaufzahlen Berechnen - Teil I

Das Ziel der Aufgabe ist es die Umlaufzahlen in vier Zyklen zu berechnen. Damit klar ist was genau gemacht werden soll, gibt es zu jeder Teilaufgabe ein kleines Beispiel.

(8.1a) Zeichne vier jeweils verschiedene Zyklen.

Als Beispiel betrachte den Zyklus in Abbildung 8.1.

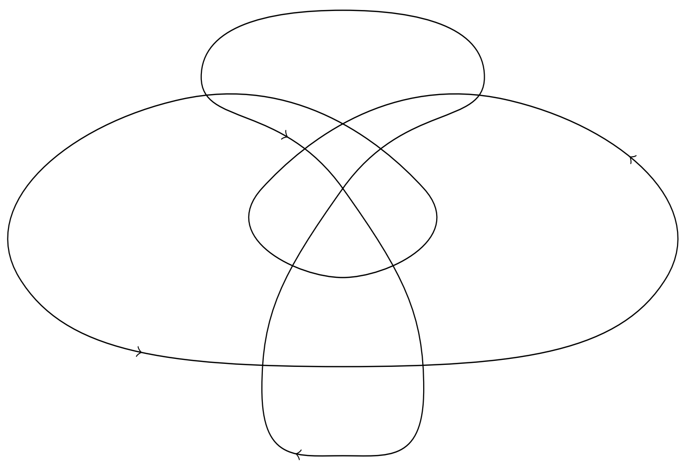

Abbildung 8.1: Ein Beispiel für einen Zyklus.

(8.1b) Berechne alle vorkommenden Umlaufzahlen innerhalb der vier Zyklen, die du in Aufgabe (8.1a) gezeichnet hast.

Für den Zyklus in Abbildung 8.1 sähe das so aus wie in Abbildung 8.2.

Aufgabe 8.2 Umlaufzahlen Berechnen - Teil II

Fixiere $n, k \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ mit $r \neq 1$. Bestimme die Umlaufzahl des geschlossenen Weges

$$\gamma(t) := \mathrm{e}^{2\pi i n t} + r\mathrm{e}^{2\pi i k t}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

um den Nullpunkt. In anderen Worten: Bestimme $\operatorname{ind}_\gamma(0)$.

HINWEIS: Gibt es eine Homotopie, welche den kleineren Kreis auf null zusammenzieht, ohne dabei über den Ursprung zu gehen?

Aufgabe 8.3 Anwendungen des Residuensatzes

(8.3a) Betrachte die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}$$

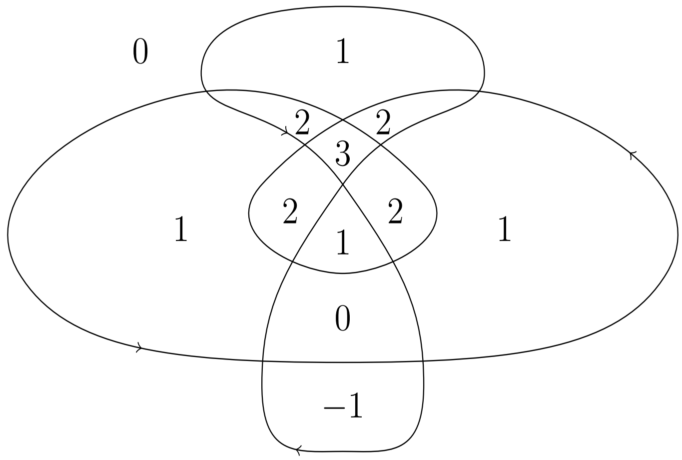

Abbildung 8.2: Der Zyklus aus Abbildung 8.1 mit Umlaufzahlen.

und die Wege

$$\gamma_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi k}{2}} + \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Berechne die Integrale

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(8.3b) Betrachte erneut

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

Diesmal definieren wir den Weg

$$\gamma(t) := 2\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Berechne erneut den Wert von

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(8.3c) Bestimme die Menge der Nullstellen der Funktion

$$f(z) := \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} - 1.$$

(8.3d) Wir definieren den Weg

$$\gamma(t) := \mathrm{i} + \frac{7}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Berechne das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} - 1)}\,\mathrm{d}z.$$

(8.3e) Betrachte

$$f(z) := \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

Welche Werte kann

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

annehmen, wenn γ irgendein geschlossener Weg ist, der weder $z_1 = 1$ noch $z_2 = 2$ durchläuft?

Aufgabe 8.4 Der Satz von Casorati-Weierstrass

Das Ziel der Aufgabe ist es den Satz von Casorati-Weierstrass zu beweisen. Bevor wir dies in Angriff nehmen sind zwei Definitionen von Nöten:

- Eine Singularität einer Funktion f heisst *wesentlich*, wenn sie weder hebbar noch ein Pol ist. Ein gutes Beispiel dafür ist die Funktion $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, welche in $z = 0$ eine Singularität hat, die weder ein Pol noch hebbar ist.

- Eine Menge M heisst *dicht*, wenn jeder Ball $B_r(z_0)$, für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, einen Punkt aus M enthält.

Der Satz von Casorati-Weierstrass lautet:

Sei $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und

$$B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$$

eine punktierte ϵ-Umgebung von z_0, für $\epsilon > 0$. Dann gilt, dass

$$M := f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$$

dicht in $\mathbb{C}$ ist.

HINWEIS: Wenn der Satz von Casorati-Weierstrass nicht gilt, so gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\omega_0 \in \mathbb{C}$, sodass $B_\delta(\omega_0)$ keinen Punkt aus M enthält. Schliesse aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, dass

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - \omega_0}$$

in z_0 eine hebbare Singularität hat.

Publiziert am 25.April.

Einzureichen am 4. Mai.

Letzte Modifikation: 25. April 2016