Komplexe Analysis D-ITET

Serie 1

Aufgabe 1.1 Der Realteil, der Imaginärteil und das Argument

Bestimme Realteil, Imaginärteil, Absolutbetrag und Argument folgender komplexer Zahlen:

i) $(1+\mathrm{i})^2$

ii) $\frac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$

iii) $2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

iv) $5\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}$

Lösung:

i) Wir haben $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ und deshalb $\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^2) = 0$, $\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^2) = 2$, sowie $|(1+\mathrm{i})^2| = 2$ und $\arg((1+\mathrm{i})^2) = \frac{\pi}{2}$.

ii) Wegen $\frac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}$ sind $\mathrm{Re}(\frac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}) = \frac{4}{5}$ und $\mathrm{Im}(\frac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}) = -\frac{3}{5}$. Der Absolutbetrag ist $|\frac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}| = 1$. Für das Argument einer komplexen Zahl z mit $\mathrm{Re}\, z > 0$ gilt $\arg z = \arctan \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}$, also $\arg(\frac{2+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}) = -\arctan(\frac{3}{4})$.

iii) Hier lassen sich das Argument und Absolutbetrag direkt ablesen. Es ist $\arg(2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{4}$ und $|2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}| = 2$. Weiter ist $\mathrm{Re}(2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}) = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ und $\mathrm{Im}(2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}) = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

iv) Hier ist $\arg(5\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}) = -\frac{\pi}{8}$, $|5\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}| = 5$, $\mathrm{Re}(5\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}) = 5\cos(\frac{\pi}{8})$ und $\mathrm{Im}(5\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}) = -5\sin(\frac{\pi}{8})$.

Aufgabe 1.2 Einige Skizzen

Skizziere folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

(1.2a) $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 < |z| < 2,\ \mathrm{Re}\, z < \frac{3}{2}\right\}$

Lösung: Die Menge ist der Durchschnitt des Inneren $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ des Kreises mit Radius 2, des Äusseren $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z|\}$ des Kreises mit Radius 1 und der Halbebene $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\, z < \frac{3}{2}\right\}$

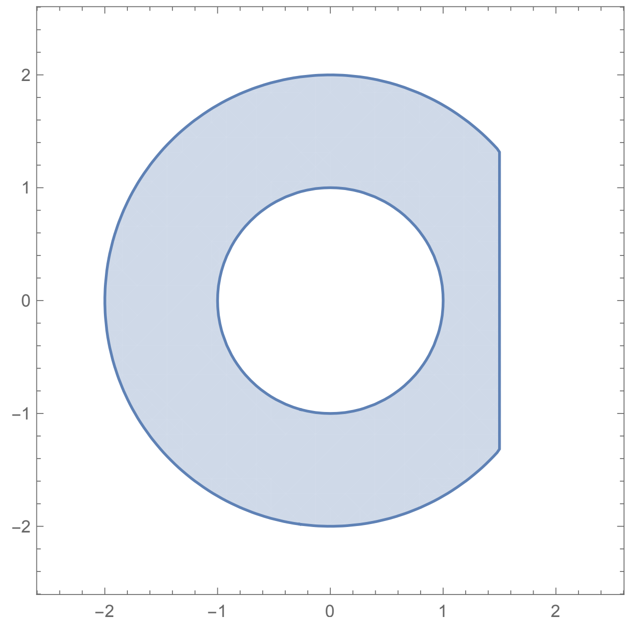

Abbildung 1.1: Skizze der Menge aus Aufgabe (1.2a)

(1.2b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 5\} \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + 5\mathrm{i}| > 5\}$

Lösung: Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 5\}$ ist das Innere des Kreises um $1 + 2\mathrm{i}$ mit Radius 5 und $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + 5\mathrm{i}| > 5\}$ ist **das Äussere** des Kreises um $-5\mathrm{i}$ mit Radius 5. Der Schnitt sieht dann so aus:

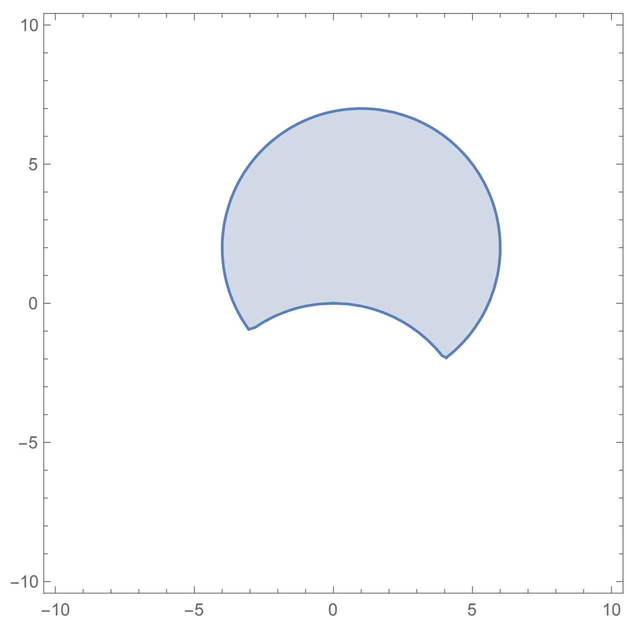

Abbildung 1.2: Skizze der Menge aus Aufgabe (1.2b)

(1.2c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z^2) > 0\}$

Lösung: Für $z = x + iy$ ist $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$. Die Gleichung $x^2 = y^2$ beschreibt die beiden Geraden $x = y$ und $x = -y$ und die gesuchte Menge ist:

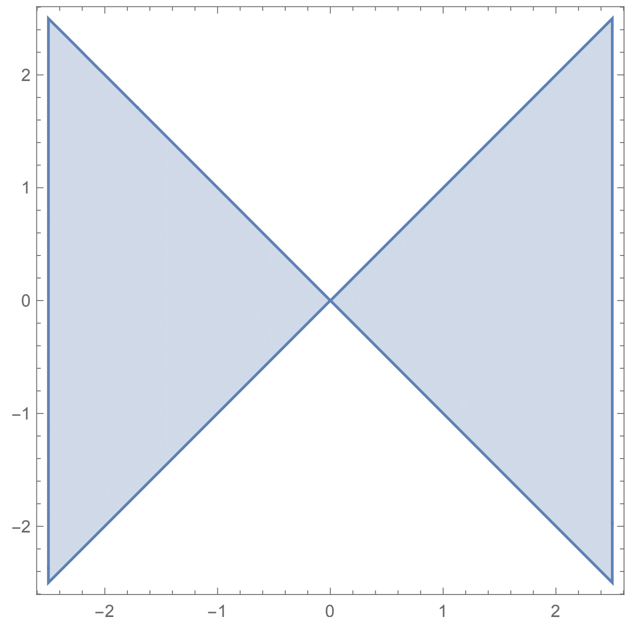

Abbildung 1.3: Skizze der Menge aus Aufgabe (1.2c)

(1.2d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z^2) > 1\}$

Lösung: Schreibe $z = x + iy$, dann ist $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$. Die Gleichung $2xy = 1$ beschreibt zwei Hyperbeläste und die gesuchte Menge sieht wie folgt aus:

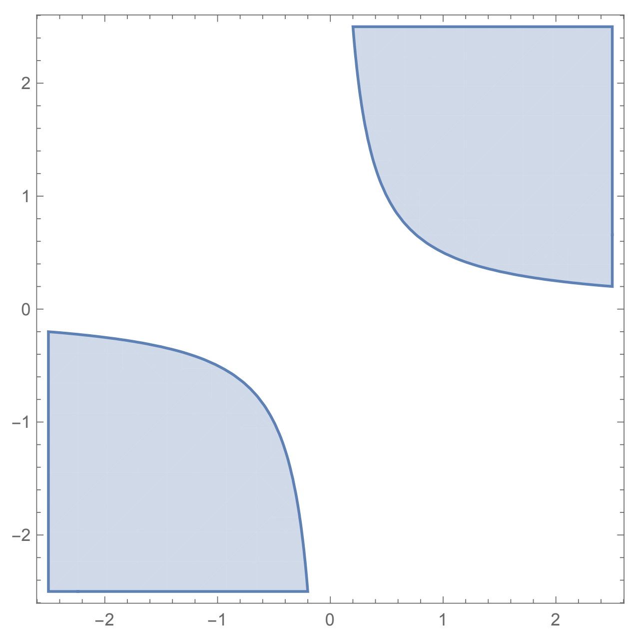

Abbildung 1.4: Skizze der Menge aus Aufgabe (1.2d)

Aufgabe 1.3 Die stereographische Projektion

(1.3a) Bestimme die Umkehrabbildung $\Psi : \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\} \to \mathbb{C}$ der stereographischen Projektion $\Phi : \mathbb{C} \to \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\}$. Hier bezeichne $\mathcal{S}^2$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbf{N}$ den Nordpol.

Lösung: Wie in der vorlesung identifizieren wir die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ mit der (x, y)-Ebene. Es sind $\mathcal{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Ein Punkt $\mathbf{p} = (x, y, z) \neq \mathbf{N}$ der Sphäre $\mathcal{S}^2$ wird in die (x, y)-Ebene wie folgt abgebildet:

Lege eine Gerade g duch den Nordpol $\mathbf{N}$ und den Punkt $\mathbf{p}$, dann schneide diese Gerade mit der (x, y)-Ebene.

Die Gerade g ist gegeben durch:

$$g(t) = (1-t)\mathbf{N} + t\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Der Punkt $g(t)$ liegt in der (x, y)-Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ genau dann, wenn

$$1 - t + tz = 0 \iff t = \frac{1}{1-z}$$

(beachte, dass $z \neq 1$, da $\mathbf{p} \neq \mathbf{N}$). Insbesondere ist der Schnittpunkt

$$\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right),$$

welcher der komplexen Zahl $\frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$ entspricht. Also ist die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion gegeben durch

$$\Psi(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + \mathrm{i}\frac{y}{1-z}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1.3b) Betrachte den Weg $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{C}$, der durch $\gamma(t) = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gegeben ist. Skizziere $\Phi(\gamma(t))$ für $t > 0$.

Lösung: Wir betrachten die stereographische Projektion

$$\Phi(x + \mathrm{i}y) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2}\right)$$

und setzen γ ein. Dadurch erhalten wir

$$\Phi(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \Phi(t\cos t + \mathrm{i}t\sin t) = \left(\frac{2t\cos t}{1 + t^2}, \frac{2t\sin t}{1 + t^2}, \frac{t^2 - 1}{1 + t^2}\right).$$

Es bleibt also, diesen Ausdruck für $t > 0$ graphisch darzustellen. Wir tun dies in Abbildung 1.5.

Aufgabe 1.4 Kreise auf der Sphäre und die stereographische Projektion

Der Schnitt einer Ebene mit der Sphäre ist ein Kreis $K \subset \mathcal{S}^2$. Sei $\Psi : \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\} \to \mathbb{C}$ die Umkehrabbildung der stereographischen Projektion. Zeige, dass $\Psi(K \setminus \{\mathbf{N}\})$ ein Kreis oder eine Gerade in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist.

Lösung: Wir betrachten eine Ebene E der Form $ax + by + cz = d$. Dann ist $(a, b, c)^\top$ ein Normalenvektor der Ebene, und wir können $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ annehmen. Dann ist d gerade der

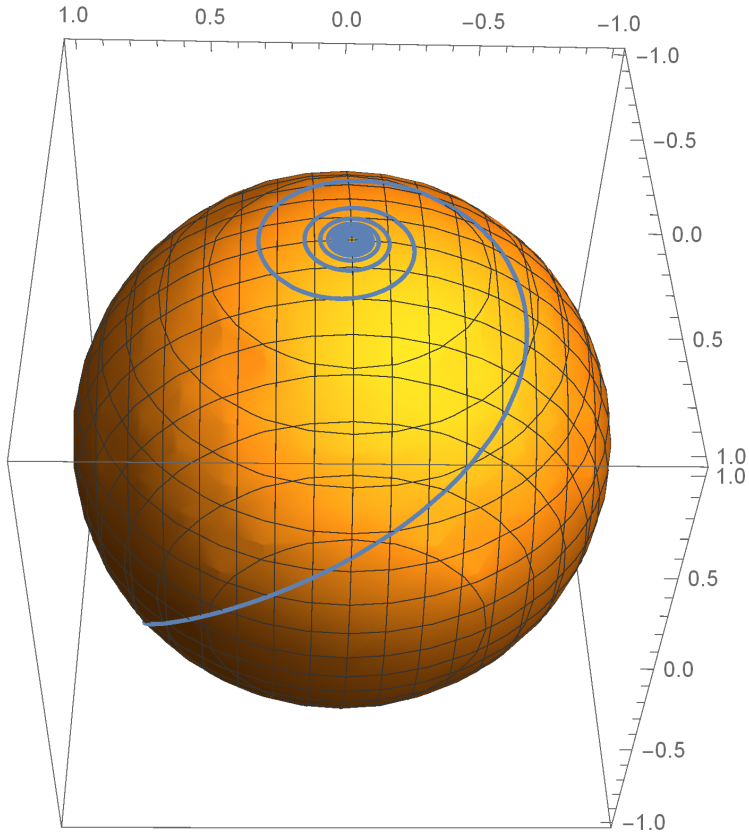

Abbildung 1.5: Die Projektion von γ auf $\mathcal{S}^2$

Abstand des Ursprungs zu E. Ist $|d| \geq 1$, so ist der Schnitt $K = E \cap \mathcal{S}^2$ leer oder einpunktig, also auch $\Psi(K \setminus \{\mathbf{N}\})$.

Wir nehmen daher im folgenden $-1 < d < 1$ an.

Sei $Z = X + \mathrm{i}Y \in \mathbb{C}$ das Bild von $(x, y, z) \in E \cap \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\}$. Dann ist

$$x = \frac{2X}{1 + X^2 + Y^2}, \quad y = \frac{2Y}{1 + X^2 + Y^2}, \quad z = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{1 + X^2 + Y^2}$$

und eingesetzt in die Ebenengleichung

$$2aX + 2bY + c(X^2 + Y^2 - 1) = d(X^2 + Y^2 + 1),$$

also

$$(d - c)(X^2 + Y^2) - 2aX - 2bY + d + c = 0.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Ist $c = d$, so sind a und b nicht beide null, denn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und $|c| < 1$. Die Gleichung $2aX + 2bY = d + c$ beschreibt dann eine Gerade in der komplexen Ebene.

Ist $d \neq c$, benutzen wir quadratisches Ergänzen. Damit erhalten wir

$$\left(X - \frac{a}{d-c}\right)^2 + \left(Y - \frac{b}{d-c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{(d-c)^2} - \frac{d+c}{d-c}.$$

Damit dies ein wohldefinierter Kreis ist, muss die rechte Seite strikt grösser als null sein. Dies ist der Fall, genau dann wenn $1 = a^2 + b^2 + c^2 > d^2$.

Publiziert am 29. Februar.

Einzureichen am 9./10. März.

Letzte Modifikation: 11. März 2016