Komplexe Analysis D-ITET

Serie 10

Aufgabe 10.1

Entwickle

$$f(z) := \frac{4z - z^2}{(z^2-4)(z+1)}$$

in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe.

(10.1a) $A_{1,2}(0)$

Lösung: Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{4z - z^2}{(z^2-4)(z+1)} = \frac{5}{3(z+1)} - \frac{3}{z+2} + \frac{1}{3(z-2)}. \tag{10.1.1}$$

Wir entwickeln nun die einzelnen Terme in Reihen. Dazu beginnen wir mit $\frac{5}{3(z+1)}$. Bemerke, dass dank der geometrischen Reihe und $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$\frac{5}{3(z+1)} = \frac{5}{3z} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} = \frac{5}{3z}\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5(-1)^{k+1}}{3}\cdot\frac{1}{z^k}$$

gilt. Als nächstes betrachten wir $\frac{3}{z+2}$. Wir benutzen erneut die geometrische Reihe und $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ und erhalten

$$\frac{3}{z+2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} = \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3(-1)^k}{2^{k+1}}z^k.$$

Für den letzten Term erhalten wir, dank der geometrischen Reihe mit $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, dass

$$\frac{1}{3(z-2)} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{3\cdot 2^{k+1}}z^k$$

gilt. Wir summieren nun die drei Terme und erhalten die Laurentreihe

$$\frac{4z - z^2}{(z^2-4)(z+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5(-1)^{k+1}}{3}\frac{1}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{9(-1)^k+1}{3\cdot 2^{k+1}}z^k$$

auf $A_{1,2}(0)$.

(10.1b) $A_{2,\infty}(0)$

Lösung: Wir benutzen die Partialbruchzerlegung aus (10.1.1) und betrachten erneut die einzelnen Terme. Für den ersten gilt unverändert

$$\frac{5}{3(z+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5(-1)^{k+1}}{3}\cdot\frac{1}{z^k},$$

da $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$. Die anderen beiden Terme müssen etwas anders berechnet werden. Zuerst betrachten wir $\frac{3}{z+2}$. Dank der geometrischen Reihe und $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ gilt

$$\frac{3}{z+2} = \frac{3}{z} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2}{z})} = \frac{3}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3(-2)^{k-1}}{z^k}.$$

Für $\frac{1}{3(z-2)}$ erhalten wir

$$\frac{1}{3(z-2)} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{3z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3} \cdot \frac{1}{z^k}.$$

Wir summieren die drei Resultate und erhalten die Laurentreihe

$$\frac{4z-z^2}{(z^2-4)(z+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(5-9\cdot 2^{k-1})(-1)^{k+1}+2^{k-1}}{3} \cdot \frac{1}{z^k}.$$

(10.1c) $A_{0,1}(-1)$

Lösung: Mit der Partialbruchzerlegung (10.1.1) erhalten wir

$$\frac{4z-z^2}{(z^2-4)(z+1)} = \frac{5}{3(z+1)} - \frac{3}{(z+1)+1} + \frac{1}{3((z+1)-3)}.$$

Bemerke, dass wir den ersten Term auf der rechten Seite nich mehr zu entwickeln brauchen, da er bereits von der Form einer Laurentreihe um $z_0 = -1$ ist. Für die anderen zwei Terme erhalten wir mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\frac{3}{(z+1)+1} = 3 \cdot \frac{1}{1-(-z-1)} = 3\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z+1)^k,$$
$$\frac{1}{3((z+1)-3)} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{3}} = -\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{3^k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{3^{k+2}}.$$

Wir summieren und erhalten

$$\frac{4z-z^2}{(z^2-4)(z+1)} = \frac{5}{3}\frac{1}{z+1} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+3}(-1)^k+1}{3^{k+2}}(z+1)^k.$$

HINWEIS: Finde zuerst die Partialbruchzerlegung von f.

Aufgabe 10.2

Sei $c \in \mathbb{C}$ ein Punkt in der oberen Halbebene, dass bedeutet $\operatorname{Im} c > 0$ und

$$f(z) := \frac{1}{z^2+1}.$$

Bestimme die Laurentreihenentwicklung von f um c.

Lösung: Wir betrachten zwei Fälle. Im ersten ist $z = \mathrm{i}$ im zweiten ist $z \neq \mathrm{i}$.

Sei zuerst $c = \mathrm{i}$. Wir beginnen damit eine Partialbruchzerlegung von f vorzunehmen. Es gilt

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right).$$

Wir brauchen nur den zweiten Term auf der rechten Seite um $c = \mathrm{i}$ zu entwickeln. Wir erhalten

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})+2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}-z}{2\mathrm{i}}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-\mathrm{i})^k}{(2\mathrm{i})^k}$$

auf $A_{0,2}(\mathrm{i})$ und

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})+2\mathrm{i}} = \frac{1}{z-\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1+\frac{2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}} = \frac{1}{z-\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i})^k(-1)^k}{(z-\mathrm{i})^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i})^{k-1}(-1)^{k-1}}{(z-\mathrm{i})^k}$$

auf $A_{2,\infty}(\mathrm{i})$. Durch summieren erhalten wir die Laurentreihen

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{z-\mathrm{i}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\mathrm{i})^{k+2}} (z-\mathrm{i})^k$$

auf $A_{0,2}(\mathrm{i})$ und

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i})^{k-2}(-1)^k}{(z-\mathrm{i})^k}$$

auf $A_{2,\infty}(\mathrm{i})$.

Betrachte als nächstes den zweiten Fall. Hier erhalten wir aus der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(z-c)-(\mathrm{i}-c)} - \frac{1}{(z-c)+(\mathrm{i}+c)}\right).$$

Wir beginnen mit dem ersten Term auf der rechten Seite und erhalten

$$\frac{1}{(z-c)-(\mathrm{i}-c)} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}-c}{z-c}} = \frac{1}{z-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}-c)^k}{(z-c)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}-c)^{k-1}}{(z-c)^k}$$

auf $A_{|\mathrm{i}-c|,\infty}(c)$ und

$$\frac{1}{(z-c)-(\mathrm{i}-c)} = \frac{1}{c-\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-c}{\mathrm{i}-c}} = \frac{1}{c-\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-c)^k}{(\mathrm{i}-c)^k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-c)^k}{(\mathrm{i}-c)^{k+1}}$$

auf $A_{0,|\mathrm{i}-c|}(c)$. Für den zweiten Term gilt

$$\frac{1}{(z-c)+(\mathrm{i}+c)} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}+c}{c-z}} = \frac{1}{z-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}+c)^k(-1)^k}{(z-c)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}+c)^{k-1}(-1)^{k-1}}{(z-c)^k}$$

auf $A_{|\mathrm{i}+c|,\infty}(c)$ und

$$\frac{1}{(z-c)+(\mathrm{i}+c)} = \frac{1}{\mathrm{i}+c} \frac{1}{1-\frac{c-z}{\mathrm{i}+c}} = \frac{1}{\mathrm{i}+c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(z-c)^k}{(\mathrm{i}+c)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(z-c)^k}{(\mathrm{i}+c)^{k+1}}$$

auf $A_{0,|\mathrm{i}+c|}(c)$. Wir summieren und erhalten die Laurentreihen

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{(-1)^k}{(\mathrm{i}+c)^{k+1}} + \frac{1}{(\mathrm{i}-c)^{k+1}}\right)(z-c)^k$$

auf $A_{0,|\mathrm{i}-c|}(c)$,

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}-c)^{k-1}}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{(z-c)^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+c)^{k+1}}(z-c)^k$$

auf $A_{|\mathrm{i}-c|,|\mathrm{i}+c|}(c)$ und

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}-c)^{k-1} + (-1)^k(\mathrm{i}+c)^{k-1}}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{(z-c)^k}$$

auf $A_{|\mathrm{i}+c|,\infty}(c)$.

Aufgabe 10.3

(10.3a) Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, für $k \in \mathbb{N}_0$. Bestimme das Integral

$$\int_{|z|=r} \tan(z)\,\mathrm{d}z.$$

Lösung: Wir hatten gesehen, dass der Tangens einfache Pole an den Punkten $z_k := \frac{\pi}{2} + k\pi$, für $k \in \mathbb{Z}$, hat. Die Residuen an diesen Polen waren gegeben durch

$$\mathrm{Res}_{z_k} \tan(z) = -1.$$

Nun betrachte $k \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi < r < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Dann gilt dank dem Residuensatz

$$\int_{|z|=r} \tan(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\ell=-k}^{k-1} \mathrm{Res}_{z_\ell} \tan(z) = -4k\pi\mathrm{i}.$$

(10.3b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne

$$\int_0^{2\pi} (\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t.$$

HINWEIS: Benutze die binomische Reihe.

Lösung: Wir setzen

$$\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

und benutzen die Substitution $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ zusammen mit dem Faktum $\sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})$. Damit erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} (\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2n}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^{2n} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \int_\gamma \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2n}\mathrm{i}z}(z - z^{-1})^{2n}\,\mathrm{d}z.$$

Der einzige Pol des Integranden liegt bei $z_0 = 0$ und wir benutzen eine Laurentreihenentwicklung, um das Residuum zu berechnen. Bemerke

$$\frac{(z - z^{-1})^{2n}}{z} = \frac{1}{z^{2n+1}}\left(1 - z^2\right)^{2n} = \frac{1}{z^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-z)^{2k} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} z^{2k-2n-1},$$

dank des binomischen Lehrsatzes. Damit errechnet sich das Residuum zu

$$\mathrm{Res}_0 \frac{(z - z^{-1})^{2n}}{z} = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Nun benutzen wir den Residuensatz und erhalten

$$\int_0^{2\pi} (\sin t)^{2n} \,\mathrm{d}t = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(2\mathrm{i})^{2n}\mathrm{i}} \mathrm{Res}_0\left(\frac{(z - z^{-1})^{2n}}{z}\right) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}.$$

Aufgabe 10.4 Das Schwarzsche Lemma

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Wir betrachten eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$.

(10.4a) Da $z_0 = 0$ eine Nulstelle von f ist, lässt sich f schreiben als $f(z) = zg(z)$, wobei g ebenfalls holomorph ist. Zeige

$$|g(z)| \leq 1, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

HINWEIS: Für $r < 1$ gilt $\max_{|z|=r}|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. Dann lasse $r \to 1$ gehen.

Lösung: Wir betrachten die Werte der Funktion f auf Kreisen mit Radius $0 < r < 1$. Es gilt

$$\max_{|z|=r}|f(z)| \leq 1,$$

da das Bild von f komplett in der Einheitskreisscheibe enthalten ist. Daraus folgt

$$\max_{|z|=r}|g(z)| = \max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}.$$

Nun benutzen wir das Maximumprinzip ein erstes Mal und bemerken, dass g sein Maximum auf $\overline{B_r} := \{z \in \mathbb{D} \,|\, |z| \leq r\}$ auf dem Rand ∂B_r annimmt. Deshalb gilt also, dass

$$\max_{|z|\leq r}|g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Nun lassen wir $r \to 1$ gehen und bemerken

$$|g(z)| \leq 1, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D},$$

wie gewünscht.

(10.4b) Schliesse aus dem Maximumprinzip das Schwarzsche Lemma:

Gilt $|f'(0)| = 1$ oder $|f(c)| = |c|$, für ein $c \in \mathbb{D}$, so ist

$$f(z) = a \cdot z,$$

für ein $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$.

HINWEIS: In beiden Fällen folgt $g = \mathrm{const}$.

Lösung: Wir betrachten beide Fälle. Im Fall $|f'(0)| = 1$ folgt aus der Kettenregel, dass $|g(0)| = 1$ gilt. Damit nimmt g aber sein Maximum im Innern der Einheitskreisscheibe an und muss, aufgrund des Maximumprinzips, konstant sein. Im Fall $|f(c)| = |c|$ folgt $|g(c)| = 1$ sofort und das gleiche Argument wie oben impliziert, dass g konstant ist. Damit folgt also die Aussage.

Publiziert am 9.Mai.

Einzureichen am 18./19. Mai.

Letzte Modifikation: 20. Mai 2016