Komplexe Analysis D-ITET

Serie 11

Aufgabe 11.1 Die Sinus-Cosinus-Form der Fourierreihe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion. Setze

$$a_k = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 0, 1, \ldots$$
$$b_k = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(11.1a) Zeige

$$a_k = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$
$$b_k = \mathrm{i}(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

HINWEIS: Wenn f 1-periodisch ist, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}$, dass $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{c+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Lösung: Betrachte $k \in \mathbb{N}$, dann gilt mit dem Hinweis (mit $c = -\frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(\cos(-2\pi kt) + \mathrm{i}\sin(-2\pi kt))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(a_{-k} + \mathrm{i}b_{-k}).\end{aligned}$$

Ausserdem sieht man leicht, da der Sinus ungerade und der Cosinus gerade ist, dass

$$\begin{aligned}a_{-k} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\cos(-2\pi kt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t = a_k, \\ b_{-k} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(-2\pi kt)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t = -b_k.\end{aligned} \tag{11.1.1}$$

Damit gilt nun $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k)$ und $\widehat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k)$. Somit

$$\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) + \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k) = a_k,$$
$$\mathrm{i}(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k) - \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k)\right) = b_k.$$

Ausserdem gilt

$$a_0 = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(0) + \widehat{f}(0).$$

(11.1b) Zeige
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt).$$

Lösung: In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass
$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)(\cos(2\pi kt) + \mathrm{i}\sin(2\pi kt))$$
gilt. Indem wir etwas anders summieren, erhalten wir
$$\begin{aligned} f(t) &= \widehat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\widehat{f}(k)(\cos(2\pi kt) + \mathrm{i}\sin(2\pi kt)) + \widehat{f}(-k)(\cos(-2\pi kt) + \mathrm{i}\sin(-2\pi kt))\Big\} \\ &= \widehat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\cos(2\pi kt)(\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)) + \mathrm{i}\sin(2\pi kt)(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))\Big\}. \end{aligned}$$

Dank Aufgabe (11.1a) erhalten wir
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt).$$

(11.1c) Ist f gerade, so gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und ist f ungerade, so gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Lösung: Wenn f gerade ist, so erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} b_{-k} &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(-2\pi kt)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(-s)\sin(2\pi ks)\,\mathrm{d}s \\ &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(s)\sin(2\pi ks)\,\mathrm{d}s = b_k, \end{aligned}$$
wobei wir die Substitution $t = -s$ verwendet haben. Dank (11.1.1) gilt aber auch $b_{-k} = -b_k$, also $b_k = -b_k$ und somit muss $b_k = 0$ sein.

Ist f nun ungerade so zeigt man ähnlich wie oben, dass für $k \in \mathbb{N}_0$, $a_{-k} = -a_k$ gilt. Damit und (11.1.1) folgt dann aber, dass $a_k = -a_k$ gelten muss und deshalb $a_k = 0$.

Aufgabe 11.2

Stelle folgende Funktionen als Fourierreihe in der Sinus-Cosinus-Form dar.

HINWEIS: Verwende Aufgabe (11.1c).

(11.2a) Betrachte die Fortsetzung mit Periode 1 von
$$f(t) := |t|, \qquad -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}.$$

Lösung: Wir folgen dem Hinweis und bemerken, dass f gerade ist. Damit gilt laut Aufgabe (11.1c), dass $b_k = 0$ sein muss. Es bleibt also die a_k zu berechnen. Wir erhalten

$$a_k = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t|\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{1}{2}} t\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t,$$

da der Integrand gerade ist. Mit Hilfe partieller Integration sehen wir, dass für $k \neq 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t\cos(2\pi kt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2\pi k}\sin(2\pi kt)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\pi k}\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4\pi k}\sin(\pi k) + \left[\frac{1}{4\pi^2 k^2}\cos(2\pi kt)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi^2 k^2}(\cos(\pi kt) - 1) = \frac{(-1)^k - 1}{4\pi^2 k^2}$$

gilt. Ausserdem errechnet man

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}.$$

Setzen wir diese Resultate in obige Formel ein erhalten wir

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Somit gilt

$$f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2}\cos(2\pi kt).$$

(11.2b) Betrachte die Fortsetzung mit Periode 1 von

$$g(t) := \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & t = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} < t < 0 \end{cases}.$$

Lösung: Ähnlich wie in der vorherigen Aufgabe folgen wir dem Hinweis. Im Gegensatz zu f ist g ungerade und darum gilt $a_k = 0$. Wir berechnen die b_k durch

$$b_k = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t,$$

da der Integrand erneut gerade ist. Ausserdem gilt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi kt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2\pi k}\cos(2\pi kt)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi k}(1 - \cos(\pi k)) = \frac{1 - (-1)^k}{2\pi k}.$$

Damit ergibt sich die Fourierreihe

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k}\sin(2\pi kt).$$

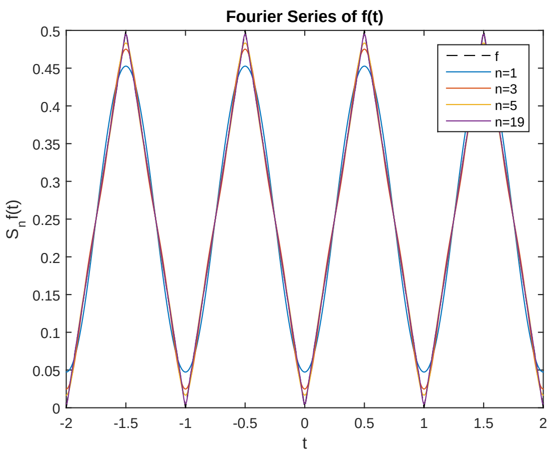

Abbildung 11.1

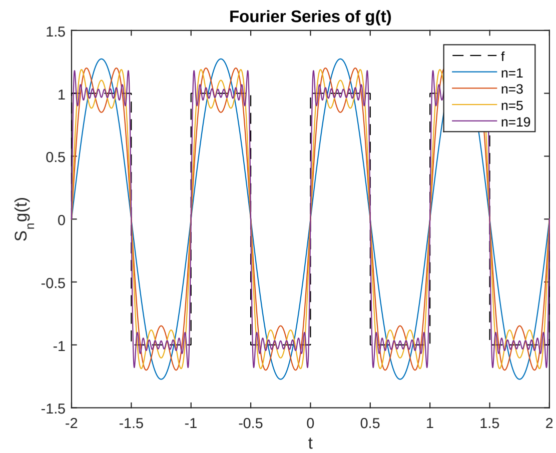

Abbildung 11.2

(11.2c) Plotte die Funktionen

$$S_n f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt),$$

für $n = 1, 3, 5, 19$, und analog für $S_n g$.

Lösung: Wenn wir den Code in Listing 11.1 benutzen erhalten wir Abbildung 11.1 für $S_n f$ und Abbildung 11.2 für $S_n g$.

Listing 11.1: Der MATLAB Code zur Berechnung der Fourierreihen.

```
function testfourier
% PRE:  -
% POST: Plots the Fourier series of the two functions as
%       specified on the exercise sheet.

% Implementation of the given functions:

% One instance of f:
f1 = @(t) abs(t).*(+(and(-0.5 <= t,t < 0.5)));
% Periodized version:
f = @(t) f1(t)+f1(t-1)+f1(t+1)+f1(t-2)+f1(t+2);
% One instance of g:
g1 = @(t) -(and(-0.5<t,t<0))+(and(t>0,t<0.5));
% Periodized version:
g = @(t) g1(t)+g1(t-1)+g1(t+1)+g1(t-2)+g1(t+2);

% For plotting:
xx = linspace(-2,2,1e4);
yy = f(xx);
zz = g(xx);

% Calculating the Fourier series:
```

```
ff = 0.25*ones(size(xx));
gg = zeros(size(xx));
for k=1:19
    ff = ff + ((-1)^k-1)./pi^2/k^2*cos(2*pi*k*xx);
    gg = gg + 2*(1-(-1)^k)/pi/k*sin(2*pi*k*xx);
    if (k==1)
        f1 = ff;
        g1 = gg;
    elseif (k==3)
        f3 = ff;
        g3 = gg;
    elseif (k==5)
        f5 = ff;
        g5 = gg;
    end
end

% Plotting
plot(xx,yy,'k--',xx,f1,xx,f3,xx,f5,xx,ff);
title('Fourier Series of f(t)');
xlabel('t'); ylabel('S_nf(t)');
legend('f','n=1','n=3','n=5','n=19');

figure;
plot(xx,zz,'k--',xx,g1,xx,g3,xx,g5,xx,gg);
title('Fourier Series of g(t)');
xlabel('t'); ylabel('S_ng(t)');
legend('f','n=1','n=3','n=5','n=19');
```

Aufgabe 11.3 Phasenverschiebung und Faltungsprodukt

(11.3a) Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion. Dann gilt, dass für beliebiges $c \in \mathbb{R}$

$$g(t) := f(t+c)$$

eine 1-periodische Funktion ist. Verifiziere

$$\widehat{g}(n) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nc} \widehat{f}(n).$$

Lösung: Wir benutzen die Definition der Fourierkoeffizienten und erhalten

$$\begin{aligned}\widehat{g}(n) &= \int_0^1 f(t+c)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} nt}\,\mathrm{d}t = \int_c^{c+1} f(s)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n(s-c)}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nc}\int_c^{c+1} f(s)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ns}\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nc}\int_0^1 f(s)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ns}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nc}\widehat{f}(n),\end{aligned}$$

mit Hilfe der Substitution $s = t + c$.

(11.3b) Für zwei 1-periodische Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieren wir das *Faltungsprodukt* durch

$$(f \star g)(x) := \int_0^1 f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Rechne nach, dass

$$\widehat{(f \star g)}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$$

gilt.

Lösung: Wir setzen direkt in die Definitionen ein und erhalten

$$\begin{aligned}\widehat{(f \star g)}(n) &= \int_0^1 (f \star g)(x)\mathrm{e}^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 f(t)g(x-t)\mathrm{e}^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(t)g(x-t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \int_0^1 g(x-t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}n(x-t)}\,\mathrm{d}x \cdot f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \int_{-t}^{1-t} g(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y \cdot f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \widehat{g}(n) \cdot f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \widehat{g}(n) \cdot \widehat{f}(n),\end{aligned}$$

durch vertauschen der Integrationsreihenfolge und die Substitution $y = x - t$.

Aufgabe 11.4

Berechne die Fourierdarstellung von

$$\frac{1}{\cos(2\pi z)}$$

einerseits für $\operatorname{Im} z > 0$ und andererseits für $\operatorname{Im} z < 0$.

Lösung: Wir betrachten zuerst die Situation auf $\operatorname{Im} z > 0$. Hier haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(2\pi z)} &= \frac{2}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z}} = \frac{2}{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z}} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}z}} = 2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}nz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(2n+1)z},\end{aligned}$$

dank der geometrischen Reihe und $\left|\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}z}\right| = \mathrm{e}^{-4\pi \operatorname{Im} z} < 1$.

Auf $\operatorname{Im} z > 0$ wenden wir die geometrische Reihe auf eine leicht andere Weise an. Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(2\pi z)} &= \frac{2}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z}} = \frac{2}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}z}} = 2\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}nz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(2n+1)z},\end{aligned}$$

da $\left|\mathrm{e}^{-4\pi\mathrm{i}z}\right| = \mathrm{e}^{4\pi \operatorname{Im} z} < 1$.

Publiziert am 16.Mai.

Einzureichen am 25./26. Mai.

Letzte Modifikation: 27. Mai 2016