Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 12

Aufgabe 12.1 Der Dirichlet-Kern

In der Vorlesung wurder der N-te Dirichlet-Kern als

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x}$$

eingeführt, wobei $N \in \mathbb{N}$.

(12.1a) Zeige

$$D_N(x) = \frac{\sin\bigl(2\pi\bigl(N+\frac{1}{2}\bigr)x\bigr)}{\sin\bigl(\frac{2\pi x}{2}\bigr)}.$$

HINWEIS: Bemerke

$$D_N(x) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} N x} \sum_{k=0}^{2N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x}$$

und verwende die Summenformel für geometrische Folgen.

Lösung: Wir erhalten

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} N x} \sum_{k=0}^{2N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x} \\ &= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} N x} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(2N+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(N+1)x} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} N x}}{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x} - 1}, \end{aligned}$$

dank der geometrischen Reihe. Wenn wir mit $\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} x}$ erweitern, so erhalten wir

$$D_N(x) = \frac{\frac{1}{2\mathrm{i}}\Bigl(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}\right)x} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}\right)x}\Bigr)}{\frac{1}{2\mathrm{i}}\bigl(\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} x} - \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} x}\bigr)} = \frac{\sin\bigl(2\pi\bigl(N+\frac{1}{2}\bigr)x\bigr)}{\sin\bigl(\frac{2\pi x}{2}\bigr)}.$$

(12.1b) Bestimme die Fourierkoeffizienten $\widehat{D_N}(k)$ des Dirichlet-Kerns.

Lösung: Die Fourierkoeffizienten des Dirichlet-Kerns sind per Definition gegeben durch

$$\widehat{D_N}(k) = \begin{cases} 1 & |k| \le N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(12.1c) Schliesse aus (12.1b) und Aufgabe 3 aus Serie 11, dass

$$(f \star D_N)(x) = S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x}$$

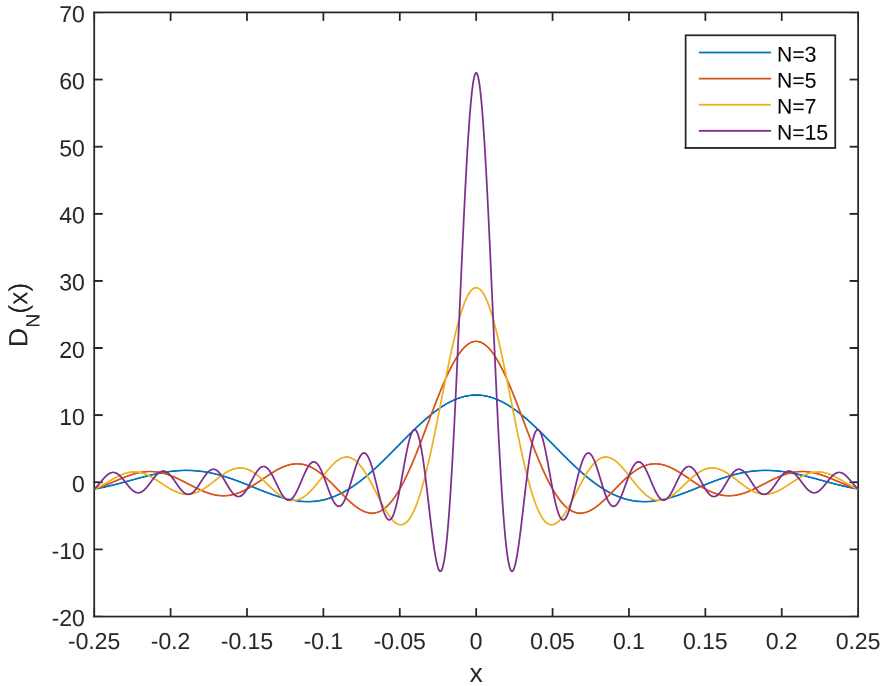

Abbildung 12.1: Die Dirichlet-Kerne D_N.

gilt, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion ist.

Lösung: Wir können $f \star D_N$ darstellen als

$$(f \star D_N)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{(f \star D_N)}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx}.$$

In Aufgabe 3 aus Serie 11 hatten wir gesehen, dass für zwei 1-periodische Funktionen f und g

$$\widehat{(f \star g)}(k) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k)$$

gilt. Damit folgt nun für die Faltung der Funktion f mit dem Dirichlet-Kern D_N

$$(f \star D_N)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \cdot \widehat{D_N}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx} = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx},$$

dank der Aufgabe (12.1b).

(12.1d) Plotte den Dirichlet-Kern für $N = 2, 5, 7, 15$.

Lösung: Mit Hilfe des Codes in Listing 12.1 erhalten wir die Abbildung 12.1.

Listing 12.1: Der MATLAB Code zur Berechnung der Dirichlet-Kerne.

```
clf

% Initialization of needed quantities:
N = [3,5,7,15];
```

```
grid = linspace(-1/4,1/4,1000);
onefigure = 1;   % Plotting in one or two figures.

% Use the sinusoidal form to ascertain that the returned
% values are real:
D = @(N,x) sin(2*pi*(2*N+1/2).*x)./sin(pi*x);

% Plotting:
if (onefigure == 0)
    plot(grid,D(N(1),grid),grid,D(N(3),grid));
    legend('N=3','N=7'); xlabel('x'); ylabel('D_N(x)');

    figure
    plot(grid,D(N(2),grid),grid,D(N(4),grid));
    legend('N=5','N=15'); xlabel('x'); ylabel('D_N(x)');
else
    plot(grid,D(N(1),grid),grid,D(N(2),grid),...
        grid,D(N(3),grid),grid,D(N(4),grid));
    legend('N=3','N=5','N=7','N=15'); xlabel('x');
    ylabel('D_N(x)');
end
```

Aufgabe 12.2 Fouriertheorie mit allgemeiner positiver Periode

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine ω-periodische Funktion, wobei $\omega > 0$.

(12.2a) Definiere

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{\omega} kt} \, \mathrm{d}t$$

und zeige, dass die Funktionen $e_n(t) := \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{\omega} nt}$ ein orthonormales System bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle_\omega := \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t$$

bilden.

Lösung: Wir betrachten zuerst einmal das Produkt

$$\langle e_n, e_n \rangle_\omega = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |e_n(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega 1 \, \mathrm{d}t = 1.$$

Also sind die Funktionen e_n normiert bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$. Desweiteren betrachten wir $n \neq k$ und

$$\langle e_n, e_k \rangle_\omega = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{\omega}(n-k)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}(n-k)} \left[\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{\omega}(n-k)t} \right]_0^\omega = \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(n-k)t} - 1}{2\pi \mathrm{i}(n-k)} = 0.$$

Somit ist $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ also ein orthonormales System bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$.

(12.2b) Finde explizite Formeln für die Koeffizienten a_k, $k \geq 0$ und b_k, $k \geq 1$, so dass f die Cosinus-Sinus Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{\omega} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{\omega} x\right)$$

hat.

Lösung: Wir betrachten die Funktion

$$g(x) := f(\omega x)$$

und bemerken, dass g eine 1-periodische Funktion ist. Daher können wir g darstellen als

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k x) + b_k \sin(2\pi k x),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) \cos(2\pi k t) \, \mathrm{d}t, \qquad k \geq 0, \\ b_k &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) \sin(2\pi k t) \, \mathrm{d}t, \qquad k \geq 1. \end{aligned}$$

Wenn wir nun beachten, dass $f(x) = g\left(\frac{x}{\omega}\right)$, so erhalten wir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{\omega} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{\omega} x\right).$$

Es bleibt also die Koeffizienten a_k und b_k mit Hilfe von f auszudrücken. Es gilt

$$a_k = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) \cos(2\pi k t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} f(s) \cos\left(\frac{2\pi k}{\omega} s\right) \mathrm{d}s, \qquad k \geq 0,$$

wobei wir die Substitution $s = \omega t$ verwendet haben. Auf ähnliche Art und Weise erhalten wir

$$b_k = \frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} f(s) \sin\left(\frac{2\pi k}{\omega} s\right) \mathrm{d}s, \qquad k \geq 1.$$

(12.2c) Zeige die folgenden Aussagen für $k, n \in \mathbb{N}$:

i) Es gilt

$$\frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n}{\omega} t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{\omega} t\right) \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

ii) Es gilt

$$\frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{\omega} t\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{\omega} t\right) \mathrm{d}t = 0.$$

iii) Es gilt

$$\frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \sin\!\left(\frac{2\pi n}{\omega}t\right)\sin\!\left(\frac{2\pi k}{\omega}t\right)\mathrm{d}t = \begin{cases}1 & n=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

HINWEIS: Zeige zuerst die Formeln

- $2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$,
- $2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$.

Verwende dies dann.

Lösung: Wir zeigen zunächst den Hinweis und beginnen mit

$$\begin{aligned}4\cos(\alpha)\cos(\beta) &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\beta)})+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)})\\ &= 2(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)).\end{aligned}$$

Es gilt ausserdem

$$\begin{aligned}-4\sin(\alpha)\sin(\beta) &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\beta)})-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)})\\ &= -2(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).\end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir die Werte für $k=n$ und erhalten einerseits

$$\frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \cos\!\left(\frac{2\pi n}{\omega}t\right)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} 1+\cos\!\left(\frac{4\pi n}{\omega}t\right)\mathrm{d}t = 1+\frac{1}{4\pi n}\left[\sin\!\left(\frac{4\pi n}{\omega}t\right)\right]_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} = 1.$$

Anderseits

$$\frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \sin\!\left(\frac{2\pi n}{\omega}t\right)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} 1-\cos\!\left(\frac{4\pi n}{\omega}t\right)\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{4\pi n}\left[\sin\!\left(\frac{4\pi n}{\omega}t\right)\right]_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} = 1.$$

Zuletzt fällt auf, dass der Integrand in $ii)$ ungerade ist und über ein bezüglich null symmetrisches Gebiet integriert wird. Daraus folgt, dass

$$\frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \sin\!\left(\frac{2\pi n}{\omega}t\right)\cos\!\left(\frac{2\pi n}{\omega}t\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Es bleibt die Integrale für $n\neq k$ zu berechnen. Wir erhalten einerseits

$$\begin{aligned}\frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \cos\!\left(\frac{2\pi n}{\omega}t\right)\cos\!\left(\frac{2\pi k}{\omega}t\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \cos\!\left(\frac{2\pi(n-k)}{\omega}t\right)+\cos\!\left(\frac{2\pi(n+k)}{\omega}t\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi(n-k)}\left[\sin\!\left(\frac{2\pi(n-k)}{\omega}t\right)\right]_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}}+\frac{1}{2\pi(n+k)}\left[\sin\!\left(\frac{2\pi(n+k)}{\omega}t\right)\right]_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} = 0.\end{aligned}$$

Andererseits

$$\begin{aligned}\frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \sin\!\left(\frac{2\pi n}{\omega}t\right)\sin\!\left(\frac{2\pi k}{\omega}t\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \cos\!\left(\frac{2\pi(n-k)}{\omega}t\right)-\cos\!\left(\frac{2\pi(n+k)}{\omega}t\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi(n-k)}\left[\sin\!\left(\frac{2\pi(n-k)}{\omega}t\right)\right]_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}}-\frac{1}{2\pi(n+k)}\left[\sin\!\left(\frac{2\pi(n+k)}{\omega}t\right)\right]_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} = 0,\end{aligned}$$

und mit derselben Begründung wie zuvor

$$\frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{2\pi n}{\omega}t\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{\omega}t\right)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Somit sind alle behaupteten Aussagen bewiesen.

Aufgabe 12.3

(12.3a) Berechne die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(x) := \mathrm{e}^{ax}, \qquad 0 \le x < 2\pi,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir berechnen

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi(a-\mathrm{i}k)}(\mathrm{e}^{2\pi(a-\mathrm{i}k)} - 1) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}{2\pi(a-\mathrm{i}k)}.$$

(12.3b) Finde mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung Formeln für

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+a^2)^2}.$$

Lösung: Wir beginnen mit der Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mathrm{e}^{2\pi a}-1}{2\pi(a-\mathrm{i}k)}\mathrm{e}^{ikx}.$$

Um die Parsevalsche Gleichung zu verwenden, berechnen wir erst einmal

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{4\pi a}-1}{4\pi a}.$$

Desweiteren benötigen wir noch

$$\left|\widehat{f}(k)\right|^2 = \frac{(\mathrm{e}^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{|a-\mathrm{i}k|^2} = \frac{(\mathrm{e}^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2(a^2+k^2)}.$$

Nun können wir die Parsevalsche Gleichung anwenden und erhalten

$$\frac{(\mathrm{e}^{2\pi a}-1)^2}{4\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{a^2+k^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(k)\right|^2 = \|f\|^2 = \frac{\mathrm{e}^{4\pi a}-1}{4\pi a}.$$

Daraus ergibt sich

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+k^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a}\frac{\mathrm{e}^{4\pi a}-1}{(\mathrm{e}^{2\pi a}-1)^2} = \frac{\pi}{a}\frac{\mathrm{e}^{2\pi a}+1}{\mathrm{e}^{2\pi a}-1} = \frac{\pi}{a}\coth\pi a$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+k^2} = \frac{\pi}{2a}\coth \pi a - \frac{1}{2a^2}.$$

Für die zweite Summe leiten wir nach a ab und erhalten

$$-2a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+k^2)^2} = -\frac{\pi}{2a^2}\coth \pi a + \frac{\pi^2}{2a}\big(1-\coth(\pi a)^2\big) + \frac{1}{a^3}.$$

Somit gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+k^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}\coth \pi a - \frac{\pi^2}{4a^2}\big(1-\coth(\pi a)^2\big) - \frac{1}{2a^4}.$$

Aufgabe 12.4 Partialbruchzerlegung des Cotangens und Sinusprodukt

Sei $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ eine nicht ganze, reelle Zahl.

(12.4a) Berechne die Cosinus-Sinus Reihe von

$$f(x) := \cos(zx), \qquad -\pi \le x < \pi.$$

Lösung: Wir bemerken, dass f gerade ist und somit gilt $b_n = 0$. Desweiteren berechnen wir mit Hilfe von Aufgabe (12.2b) und dem Hinweis aus Aufgabe (12.2c), dass

$$\begin{aligned}
a_n &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(zx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(zx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\cos((z-n)x) + \cos((z+n)x)\}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z-n}\sin((z-n)x) + \frac{1}{z+n}\sin((z+n)x)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z-n}\sin((z-n)\pi) + \frac{1}{z+n}\sin((z+n)\pi)\right) \\
&= \frac{(-1)^n\sin(z\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right), \qquad n \ge 0.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Sinus-Cosinus Reihe

$$\cos(zx) = \frac{\sin(z\pi)}{\pi}\left\{\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}\right)\cos(kx)\right\}.$$

(12.4b) Schliesse aus (12.4a), dass

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}\right).$$

Lösung: Wenn wir im Resultat der Aufgabe (12.4a) $x = \pi$ setzen, so erhalten wir

$$\cos(\pi z) = \frac{\sin(z\pi)}{\pi}\left\{\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}\right)\right\}.$$

Daraus folgt

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}\right).$$

(12.4c) Folgere aus (12.4b) das Eulersche Sinusprodukt

$$\sin \pi x = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right). \tag{12.4.1}$$

HINWEIS: Setze

$$F(x) = \ln\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right), \qquad x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

und zeige $F'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}$ mit Hilfe von (12.4b).

Lösung: Wir folgen dem Hinweis und betrachten

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(\sin \pi x) - \ln(\pi x)) = \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} = \pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-k} + \frac{1}{x+k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2s}{s^2-k^2}\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2s}{s^2-k^2}\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-k^2}^{x^2-k^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2-x^2}{k^2}\right) = \ln \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \end{aligned}$$

mit der Substitution $t = s^2 - k^2$. Somit folgt nun aber (12.4.1) auf $(-1, 1) \setminus \{0\}$. Desweiteren gilt (12.4.1) für $x \in \{-1, 0, 1\}$ offensichtlicherweise, da jeweils beide Seiten der Gleichung null sind. Also folgt (12.4.1) auf $[0, 1]$ und somit, dank 1-periodizität, auf ganz $\mathbb{R}$.

Publiziert am 23.Mai.

Einzureichen am 1./2. Juni.

Letzte Modifikation: 3. Juni 2016