Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 2

Aufgabe 2.1 Ableitungsregeln

Berechne die komplexe Ableitung von:

(2.1a) $p(z) = z^6 + 5z^3 + 2$

Lösung: In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^n = nz^{n-1}$, für $z \in \mathbb{C}$. Somit gilt dank der Linearität der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} p(z) = 6z^5 + 15z^2.$$

(2.1b) $q(z) = \mathrm{e}^{\alpha z}$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$.

Lösung: Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} q(z) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha(z+h)} - \mathrm{e}^{\alpha z}}{h} = \mathrm{e}^{\alpha z} \cdot \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha \mathrm{e}^{\alpha z}.$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha h} - 1}{h} = \frac{1}{h} \left(1 + \alpha h + h^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k h^{k-2}}{k!} - 1 \right) \xrightarrow{h \to 0} \alpha.$$

(2.1c) $r(z) = \sin(z^2)$, wobei $\sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$.

Lösung: In der vorherigen Aufgabe hatten wir gesehen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. Hieraus folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \cos(z).$$

Nun benutzen wir die Kettenregel und sehen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} r(z) = \cos(z^2) \cdot (2z) = 2z \cos(z^2).$$

(2.1d) $s(z) = \sin(z) \cdot \cos(z)$

Lösung: Wir benutzen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin z = \cos z$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z = -\sin z$ und die Produktregel. Damit erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} s(z) = \cos^2 z - \sin^2 z.$$

Aufgabe 2.2 Möbiustransformationen - Teil I

Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

eine Matrix mit Determinante $\det M := ad - bc = 1$.

(2.2a) Bestimme den Definitionsbereich der Funktion

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Lösung: Die Funktion f ist nur dann nicht definiert, wenn wir bei der Auswertung durch null teilen. Wir betrachten zunächst den Fall $c \neq 0$. Der Nenner ist null genau dann, wenn

$$cz + d = 0 \iff z = -\frac{d}{c}.$$

Somit ist der Definitionsbereich der Funktion f gegeben durch:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \left\{-\tfrac{d}{c}\right\}$$

Für den Fall $c = 0$ muss $d \neq 0$ gelten, da $ad - bc = 1$. In diesem Fall ist f für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert, und es gilt $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$.

(2.2b) Bestimme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z)$.

Lösung: Wir benutzen die Quotientenregel und erhalten mit $ad - bc = 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

(2.2c) Erweitere f zu einer Funktion $\widehat{f} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Lösung: Sei zuerst $c \neq 0$. Um f auf die ganze komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ zu erweitern, müssen wir $\widehat{f}$ an den Stellen $-\frac{d}{c}$ und ∞ definieren. Wir bemerken für $z \to -\frac{d}{c}$, dass $f(z) \to \infty$, und daher setzen wir

$$\widehat{f}\left(-\tfrac{d}{c}\right) := \infty.$$

Als nächstes müssen wir $\widehat{f}(\infty)$ definieren. Dazu berechnen wir

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \frac{a}{c}$$

und setzen

$$\widehat{f}(\infty) := \frac{a}{c}.$$

Im Fall $c = 0$ muss nur $\widehat{f}(\infty)$ definiert werden. Wir setzen $\widehat{f}(\infty) := \infty$.

(2.2d) Bestimme die Umkehrfunktion von $\widehat{f}$.

Lösung: Seien $c \neq 0$ und $f(z) = w$ für $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \iff czw + dw = az + b \iff (cw-a)z = b - dw \iff z = \frac{-dw+b}{cw-a}.$$

Die Umkehrabbildung $\widehat{f}^{-1} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist also gegeben durch

$$\widehat{f}^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{-dz+b}{cz-a} & \text{wenn } z \neq \frac{a}{c} \text{ und } z \neq \infty \\ \infty & \text{wenn } z = \frac{a}{c} \\ -\frac{d}{c} & \text{wenn } z = \infty \end{cases}. \tag{2.2.1}$$

Sei nun $c = 0$. Dann ist $a \neq 0 \neq d$, und die Umkehrabbildung $\widehat{f}^{-1}$ ist gegeben durch

$$\widehat{f}^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{dz-b}{a} & \text{wenn } z \neq \infty \\ \infty & \text{wenn } z = \infty \end{cases}.$$

Aufgabe 2.3 Möbiustransformationen - Teil II

Seien

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

komplexe 2×2-Matrizen mit Determinante $\det M = 1 = \det N$. Weiter seien f_M und f_N die zugehörigen Möbiustransformationen

$$f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad f_N(z) = \frac{ez+f}{gz+h}.$$

(2.3a) Rechne nach, dass

$$f_M \circ f_N(z) = f_M(f_N(z)) = f_{M \cdot N}(z)$$

gilt. Hier bezeichnet $M \cdot N$ das Matrixprodukt.

Lösung: Wir berechnen

$$f_M(f_N(z)) = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\frac{ez+f}{gz+h} + d} = \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)}.$$

Dies entspricht genau der Transformation, die zur Matrix

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

gehört.

(2.3b) Verifiziere $(f_M)^{-1} = f_{M^{-1}}$.

Lösung: Dank Aufgabe (2.3a) haben wir

$$f_M(f_{M^{-1}}(z)) = f_{I_2}(z) = z = f_{I_2}(z) = f_{M^{-1}}(f_M(z)).$$

Aufgabe 2.4 Kreisinversion als Rotation der Sphäre

(2.4a) Verifiziere, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{wenn } z \neq 0 \text{ und } z \neq \infty \\ 0 & \text{wenn } z = \infty \\ \infty & \text{wenn } z = 0 \end{cases}$$

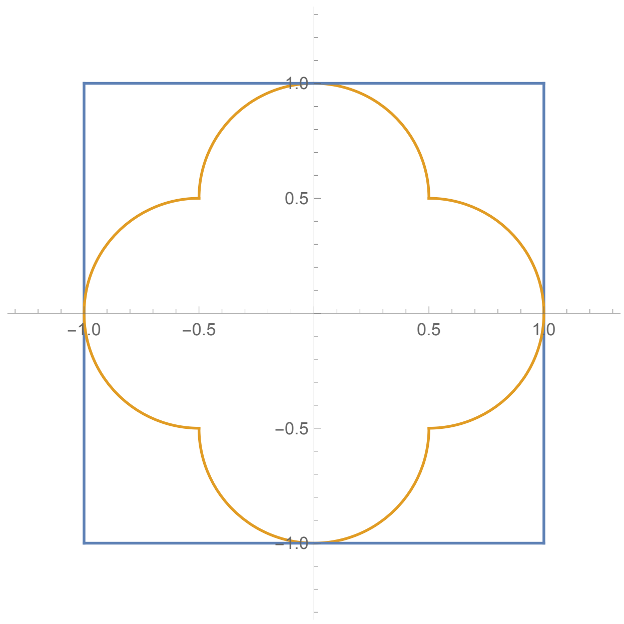

Abbildung 2.1: Das Bild des Einheitsquadrates

unter der stereographischen Projektion einer Drehung der Einheitssphäre um $180°$ um die x-Achse entspricht.

Lösung: Wie in der Serie von letzter Woche betrachten wir die stereographische Projektion $\Phi : \mathbb{C} \to \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\}$, wobei $\mathbf{N} = (0,0,1)^\top$ den Nordpol der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, und ihre Umkehrabbildung $\Psi : \mathcal{S}^2 \setminus \{\mathbf{N}\} \to \mathbb{C}$. Dann berechnen wir

$$\Phi(f(\Psi(x,y,z))) = \left(\frac{2x(1-z)}{x^2+y^2+(z-1)^2}, \frac{-2y(1-z)}{x^2+y^2+(z-1)^2}, \frac{(z-1)^2-x^2-y^2}{x^2+y^2+(z-1)^2} \right)^\top .$$

Nun ist $x^2+y^2+z^2=1$, also ist der Nenner der Brüche gleich $2(1-z)$. Der Zähler der dritten Komponente ist gleich $2z(z-1)$. Insgesamt vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\Phi(f(\Psi(x,y,z))) = (x,-y,-z)^\top,$$

was die Behauptung zeigt.

(2.4b) Zeichne das Bild des Einheitsquadrates $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + \mathrm{i}y,\ \max\{|x|,|y|\} = 1\}$ unter der Abbildung f, die in Aufgabe (2.4a) definiert ist.

Lösung: Die Seiten des Quadrates sind parametrisiert durch $1+\mathrm{i}t$, $-1+\mathrm{i}t$, $t+\mathrm{i}$ und $t-\mathrm{i}$, wobei $t \in [-1,1]$. Setzen wir dies in die Transformation f ein so erhalten wir $\frac{1}{1+t^2} - \mathrm{i}\frac{t}{1+t^2}$, $-\frac{1}{1+t^2} - \mathrm{i}\frac{t}{1+t^2}$, $\frac{t}{1+t^2} - \mathrm{i}\frac{1}{1+t^2}$ und $\frac{t}{1+t^2} + \mathrm{i}\frac{1}{1+t^2}$. Damit sieht das Bild aus wie dargestellt in Abbildung 2.1.

Publiziert am 7. März.

Einzureichen am 16./17. März.

Letzte Modifikation: 17. März 2016