Komplexe Analysis D-ITET

Serie 3

Aufgabe 3.1 Die reellen Cauchy-Riemann Gleichungen

Die Cauchy-Riemann Gleichung $\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}f(x+\mathrm{i}y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x+\mathrm{i}y)$ wird häufig in folgender reeller Form hingeschrieben: Man spaltet $f(x+\mathrm{i}y) = u(x+\mathrm{i}y) + \mathrm{i}v(x+\mathrm{i}y)$ in Real- und Imaginärteil auf und schreibt

$$\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v, \qquad \frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v.$$

Welche der folgenden Funktionen erfüllen die reellen Cauchy-Riemann Gleichungen?

(3.1a) $f(x+\mathrm{i}y) := x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$.

Lösung: Zuerst schreiben wir Real- und Imaginärteil der Funktion f hin. Diese sind gegeben durch

$$u(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2, \quad v(x+\mathrm{i}y) = 2xy,$$

mit der üblichen Notation $f = u + \mathrm{i}v$. Die partiellen Ableitungen dieser Ausdrücke sind

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x+\mathrm{i}y) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}u(x+\mathrm{i}y) = -2y, \quad \frac{\partial}{\partial x}v(x+\mathrm{i}y) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}v(x+\mathrm{i}y) = 2x.$$

Somit sehen wir, dass die Cauchy-Riemannschen Gleichungen $\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v$ und $\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}v$ erfüllt sind. Es sei hier noch angemerkt, dass mit $z = x + \mathrm{i}y$

$$f(z) = z^2$$

gilt und dass somit a-priori klar ist, dass f die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen muss.

(3.1b) $g(x+\mathrm{i}y) := -x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}xy$.

Lösung: Real- und Imaginärteil von g sind gegeben durch

$$u(x+\mathrm{i}y) = -x^2 + y^2, \quad v(x+\mathrm{i}y) = 2xy.$$

Damit berechnen sich die Ableitungen zu

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x+\mathrm{i}y) = -2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}u(x+\mathrm{i}y) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial x}v(x+\mathrm{i}y) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}v(x+\mathrm{i}y) = 2x$$

und man sieht, dass g die Cauchy-Riemann Gleichungen nicht erfüllt. Wir bemerken auch hier, dass

$$g(z) = \overline{z}^2$$

gilt und dass somit von vorne herein klar ist, dass g die Cauchy-Riemannschen Gleichungen nicht erfüllen kann.

(3.1c) $h(x+\mathrm{i}y) := \frac{x^2+y^2}{x-\mathrm{i}y}$.

Lösung: Wir berechnen

$$h(x+\mathrm{i}y) := \frac{x^2+y^2}{x-\mathrm{i}y} = \frac{(x^2+y^2)(x+\mathrm{i}y)}{(x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)} = x+\mathrm{i}y.$$

Somit sind Real- und Imaginärteil von h gegeben durch $u(x+\mathrm{i}y) = x$ und $v(x+\mathrm{i}y) = y$. Also sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}u(x+\mathrm{i}y) = 1$, $\frac{\partial}{\partial y}u(x+\mathrm{i}y) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}v(x+\mathrm{i}y) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y}v(x+\mathrm{i}y) = 1$. Wir sehen leicht, dass damit die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt sind. Bemerke, dass

$$h(z) = z$$

und dass somit die Cauchy-Riemannschen Gleichungen gelten müssen.

Aufgabe 3.2 Die Komplexen Zahlen als Matrizen

Identifiziere $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ mit der Matrix

$$M_z := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Seien nun $z, w \in \mathbb{C}$. Rechne nach:

(3.2a) $M_z + M_w = M_{z+w}$.

Lösung: Wir betrachten $z = a + \mathrm{i}b$ und $w = c + \mathrm{i}d$. Damit haben wir

$$M_z + M_w = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = M_{z+w}.$$

(3.2b) $M_z \cdot M_w = M_{z\cdot w}$.

Lösung: Seien $z = a + \mathrm{i}b$ und $w = c + \mathrm{i}d$. Somit gilt $z \cdot w = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$. Also

$$M_z \cdot M_w = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = M_{z\cdot w}.$$

(3.2c) $M_z^\top = M_{\overline{z}}$.

Lösung: Sei $z = a + \mathrm{i}b$. Damit gilt

$$M_z^\top = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -(-b) \\ (-b) & a \end{pmatrix} = M_{\overline{z}}.$$

(3.2d) Interpretiere die Spur und die Determinante von M_z.

Lösung: Zuerst betrachten wir die Spur der Matrix M_z, wobei $z = a + \mathrm{i}b$. Es gilt

$$\operatorname{tr} M_z = 2a = 2\operatorname{Re} z.$$

Nun berechnen wir die Determinante

$$\det M_z = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

(3.2e) Rechne nach, dass die Matrix M_z für $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ einer Drehstreckung entspricht.

Lösung: Wir haben $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi$. Somit gilt

$$M_z = r\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix entspricht einer Drehstreckung des $\mathbb{R}^2$. Um genau zu sein dreht die Matrix die Ebene im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ und Multiplikation mit r streckt die Ebene um einen Faktor r.

Aufgabe 3.3 Potenzreihen

Stelle die folgenden Funktionen als Potenzreihen dar und bestimme ihren Konvergenzradius.

(3.3a) $f(z) := \frac{1}{(1-z)^2}$.

Lösung: Wir bemerken, dass f die Ableitung der Funktion

$$F(z) = \frac{1}{1-z}$$

ist. In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass innerhalb des Konvergenzradius

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{3.3.1}$$

gilt. Insbesondere lässt sich F formal ableiten zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}.$$

Diese formale Ableitung entspricht der echten Ableitung von F auf dem Konvergenzradius der Potenzreihe (3.3.1). Dieser ist $\rho(F) = 1$, wie man einfach nachprüft. Damit gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

für $|z| < 1$. Da desweiteren der Konvergenzradius einer Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ihrer Ableitung übereinstimmt, gilt $\rho(f) = 1$.

(3.3b) $g(z) := -\frac{2z}{(1+z^2)^2}$.

Lösung: Bemerke, dass g Ableitung der Funktion

$$G(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ist. Die Potenzreihe dieser Funktion ist:

$$G(z) = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist $\rho(G) = 1$. Nun berechnen wir die Ableitung

$$g(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n z^{2n-1}$$

und haben $\rho(g) = 1$.

HINWEIS: Die Funktionen sind Ableitungen von Funktionen, deren Potenzreihen einfach ju bestimmen sind.

Aufgabe 3.4 Das Wirtinger Kalkül

Die Wirtinger-Ableitung $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ erlaubt es uns, die Cauchy-Riemann Gleichungen als

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 0$$

zusammenzufassen.

Berechne die Wirtinger-Ableitung der folgenden Funktionen einerseits durch direktes Ableiten nach der Variable $\overline{z}$ und andererseits durch Einsetzen in die Definition der Wirtinger-Ableitung.

(3.4a) $f(z) := z$,

Lösung: Wenn wir direkt nach der Variable $\overline{z}$ ableiten so erhalten wir $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 0$, da f nicht von $\overline{z}$ abhängt. Setzen wir in die Definition der Wirtinger-Ableitung ein so gilt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} y\right) = 0$$

und die beiden Resultate stimmen überein.

(3.4b) $g(z) := \overline{z}$,

Lösung: Direkt nach $\overline{z}$ abgeleitet ergibt sich $\frac{\partial}{\partial z} g(z) = 1$. Mit der Definition der Wirtinger-Ableitung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) g(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x - \mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right) = 1$$

und die beiden Resultate stimmen überein.

(3.4c) $h(z) = |z|^2 = z\overline{z}$,

Lösung: Direkt nach $\overline{z}$ abgeleitet ergibt sich $\frac{\partial}{\partial z} h(z) = z$. Mit der Definition der Wirtinger-Ableitung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) h(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y} y^2\right) = x + \mathrm{i}y = z$$

und die beiden Resultate stimmen überein.

Bemerkung: Formal gilt, dass eine Funktion f komplex differenzierbar ist, wenn f nicht von der komplex konjugierten ihres Arguments $\overline{z}$ abhängig ist. Die Wirtinger-Ableitung überprüft genau dies.

Publiziert am 14. März.

Einzureichen am 23./24. März.

Letzte Modifikation: 1. April 2016