Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 4

Aufgabe 4.1 Die Umlaufzahl

(4.1a) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $r > 0$. Parametrisiere den Weg γ_k, der z_0 im Abstand r k-mal umläuft.

Lösung: Der Weg kann parametrisiert werden durch

$$\gamma_k(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \qquad 0 \leq t < 2\pi.$$

(4.1b) Berechne

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z. \tag{4.1.1}$$

Lösung: Wir berechnen

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}} \cdot (\mathrm{i}kr\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \mathrm{i}k \, \mathrm{d}z = k.$$

Bemerke, dass das Integral (4.1.1) genau der ganzen Zahl k entspricht, welche beschreibt wie oft der Weg γ_k den Punkt z_0 umläuft.

Aufgabe 4.2 Das Wegintegral der Konjugierten

Berechne

$$\int_\gamma \overline{z} \, \mathrm{d}z \tag{4.2.1}$$

für die folgenden Wege:

(4.2a) Der Kreis mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Lösung: Der Kreis mit Radius $r > 0$ um den Punkt z_0 kann parametrisiert werden durch

$$\gamma_r(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad 0 \leq t < 2\pi.$$

Damit berechnen wir

$$\int_{\gamma_r} \overline{z} \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (\overline{z_0} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) \cdot (\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \, \mathrm{d}t = \mathrm{i}r\overline{z_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t + \mathrm{i}r^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\mathrm{i}\pi r^2,$$

wobei wir im letzten Schritt die Periodizität von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ausgenutzt haben.

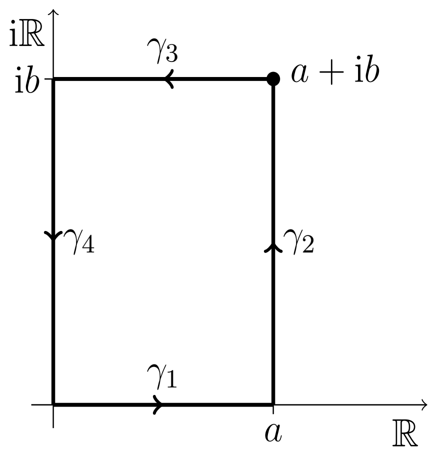

Abbildung 4.1: Die Zerlegung von γ_R im Falle $z_0 = 0$.

(4.2b) Der Rand eines achsenparallelen Rechtecks mit Länge $a > 0$ und Breite $b > 0$.

Lösung: Die Parametrisierung des Randes eines allgemeinen achsenparallelen Rechtecks mit unterer, linker Ecke in $z_0 \in \mathbb{C}$ kann in einzelne lineare Teilstücke zerlegt werden (siehe Abbildung 4.1). Sei γ_R die Parametrisierung des ganzen Randes so gilt

$$\gamma_R = \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \sqcup \gamma_3 \sqcup \gamma_4,$$

mit

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &:= z_0 + t, \qquad 0 \le t < a \\
\gamma_2(t) &:= z_0 + a + \mathrm{i}t, \qquad 0 \le t < b \\
\gamma_3(t) &:= z_0 + (a - t) + \mathrm{i}b, \qquad 0 \le t < a \\
\gamma_4(t) &:= z_0 + \mathrm{i}(b - t), \qquad 0 \le t < b.
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir nun das Integral

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} \overline{z}\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_1} \overline{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \overline{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} \overline{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} \overline{z}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^a t\,\mathrm{d}t + \int_0^b \mathrm{i}(a - \mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a (-1)(a - t - \mathrm{i}b)\,\mathrm{d}t + \int_0^b (-\mathrm{i})(\mathrm{i}t - \mathrm{i}b)\,\mathrm{d}t \\
&+ a\overline{z_0} + \mathrm{i}b\overline{z_0} + (-1)a\overline{z_0} + (-\mathrm{i})b\overline{z_0} \\
&= \frac{1}{2}a^2 + \mathrm{i}ab + \frac{1}{2}b^2 - a^2 + \mathrm{i}ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - b^2 = 2\mathrm{i}ab.
\end{aligned}$$

(4.2c) Was beschreibt $\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$ für einen allgemeinen geschlossenen Weg γ?

Lösung: Aus den Lösungen für Teilaufgaben (4.2a) und (4.2b) erraten wir, dass

$$\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}A(\gamma)$$

gilt, wobei $A(\gamma)$ die Fläche beschreibt, die von γ berandet wird.

Aufgabe 4.3 Das Wegintegral ist unabhängig von der Parametrisierung

(4.3a) Sei $\gamma : [c, d] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $\sigma : [a, b] \to [c, d]$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung mit $\sigma(a) = c$ und $\sigma(b) = d$. Verifiziere, dass

$$\int_{\gamma\circ\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

HINWEIS: Benutze die Substitutionsformel.

Lösung: Mit Hilfe der Substitutionsformel erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(\sigma(t)))\cdot(\gamma\circ\sigma)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(\sigma(t)))\dot\gamma(\sigma(t))\dot\sigma(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(4.3b) Wenn $|f(z)| \leq C$, für alle z auf dem Weg γ, so gilt

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq C\cdot L(\gamma),$$

wobei $L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t$ die Länge des Weges γ bezeichnet.

Lösung: Wir rechnen

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t \leq C\int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t = C\cdot L(\gamma).$$

Aufgabe 4.4 Der kleine Residuensatz

(4.4a) Sei $f\colon B_R(z_0)\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die als *Laurentreihe* um z_0 dargestellt werden kann, d.h.,

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

mit (gleichmässig) konvergenter Reihe für $\varepsilon < |z - z_0| < R - \varepsilon$. Für $r < R$ gilt dann

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot a_{-1}$$

Lösung: Wegen der gleichmässigen Konvergenz können wir Integration und Summation vertauschen:

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-N}^{\infty}\int_{|z-z_0|=r} a_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot a_{-1},$$

wegen der in der Vorlesung bewiesenen Formel

$$\int_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=r} z^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

(4.4b) Ist $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ um z_0 als Potenzreihe mit Konvergenzradius R darstellbar, so gilt für $0 < r < R$ die Cauchy-Integralformel

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z.$$

Lösung: Beachte, dass $a_0 = g(z_0)$ und dass die Laurentdarstellung

$$\frac{g(z)}{z - z_0} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n$$

gilt. Die Cauchy-Integralformel folgt also direkt aus teil (4.4a).

Publiziert am 21. März.

Einzureichen am 6./7. April.

Letzte Modifikation: 8. April 2016