Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 5

Aufgabe 5.1 Cauchy-Integralformel

Berechne:

(5.1a)

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)(z-3)^2}\,\mathrm{d}z$$

Lösung: Wir bemerken, dass $z=-1$ der einzige Pol des Integranden innerhalb des Kreises um $z_0 = 0$ mit Radius $R = 2$ ist. Wir definieren also

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^z}{(z-3)^2}$$

und wissen dank der Cauchy Integralformel, dass

$$f(-1) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z+1}\,\mathrm{d}z$$

gilt. Somit ist

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)(z-3)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} f(-1) = \frac{\mathrm{i}\pi}{8\mathrm{e}}.$$

(5.1b)

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$$

Lösung: Hier ist $z = -\mathrm{i}$ der einzige Pol des Integranden in der Kreisscheibe um $z_0 = 0$ mit Radius $R = 2$. Wir definieren also

$$g(z) := \sin(z)$$

und benutzen die Cauchy Integralformel:

$$g(-\mathrm{i}) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z|=2} \frac{g(z)}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z.$$

Also gilt

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} g(-\mathrm{i}) = -2\pi\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}) = 2\pi\sinh(1) = \pi(\mathrm{e} - \tfrac{1}{\mathrm{e}}).$$

(5.1c)

$$\int_{|z+2\mathrm{i}|=2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

Lösung: Wir bemerken, dass

$$z^2+1=(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$$

gilt und dass deshalb $z=-\mathrm{i}$ der einzige Pol des Integranden im Kreis um $z_0=-2\mathrm{i}$ mit Radius $R=2$ ist. Dank der Cauchy Integralformel wissen wir nun

$$h(-\mathrm{i})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z+2\mathrm{i}|=2} \frac{h(z)}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z,$$

wobei

$$h(z):=\frac{1}{z-\mathrm{i}}.$$

Damit gilt

$$\int_{|z+2\mathrm{i}|=2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}h(-\mathrm{i})=-\pi.$$

(5.1d)

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z$$

Lösung: Der Integrand ist holomorph in der Kreisscheibe um $z_0=0$ mit Radius $R=1$. Dank des Cauchyschen Integralsatzes folgern wir nun

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z=0.$$

Aufgabe 5.2 Zwei Reihendarstellungen

Fixiere $z_0\in\mathbb{C}$ und zeige für w, $z\in\mathbb{C}$:

(5.2a) Falls $|z-z_0|<|w-z_0|$ so gilt

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$

Lösung: Wir setzen

$$q:=\frac{z-z_0}{w-z_0},\qquad |q|<1.$$

Dann gilt dank der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{w-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n=\frac{1}{w-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{w-z_0}{w-z}$$

und die Aussage ist gezeigt.

(5.2b) Falls $|z - z_0| > |w - z_0|$ so gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n .$$

Lösung: Hier setzen wir

$$q := \frac{w-z_0}{z-z_0}, \qquad |q| < 1.$$

Dann gilt erneut dank der geometrischen Reihe

$$\frac{-1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n = \frac{-1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{-1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{-1}{z-z_0} \cdot \frac{z-z_0}{z-w}$$

und die Aussage folgt.

Aufgabe 5.3 Eine Potenzreihenentwicklung

Finde die Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$$

um $z_0 = 0$ für $|z| < 1$.

HINWEIS: Benutze eine Partialbruchzerlegung.

Lösung: Wie im Hinweis angedeutet benutzen wir eine Partialbruchzerlegung. Der Ansatz dazu ist

$$\frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{(z+1)^2} + \frac{Bz+C}{z^2+1}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 2z+1 &= A_1(z+1)(z^2+1) + A_2(z^2+1) + (Bz+C)(z+1)^2 \\ &= (A_1+B)z^3 + (A_1+A_2+2B+C)z^2 + (A_1+B+2C)z + (A_1+A_2+C), \end{aligned}$$

woraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 + B = 0, &\qquad A_1 + A_2 + 2B + C = 0 \\ A_1 + B + 2C = 2, &\qquad A_1 + A_2 + C = 1 \end{aligned}$$

für die Koeffizienten folgen. Wir lösen obiges Gleichungssystem und erhalten

$$A_1 = \frac{1}{2}, \qquad A_2 = B = -\frac{1}{2}, \qquad C = 1.$$

Also gilt

$$\frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z+1)^2} + \frac{2-z}{2(z^2+1)}. \tag{5.3.1}$$

Nun betrachten wir $|z| < 1$ und berechnen mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} z^n.$$

Desweiteren berechnen wir unter Hilfe der Cauchyschen Produktformel

$$-\frac{1}{2(z+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right)^2 = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-z)^n =$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2}z^n.$$

Wir benutzen die geometrische Reihe erneut und erhalten

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,$$

wobei

$$a_n := \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{wenn } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ -1, & \text{wenn } n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{wenn } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}.$$

Alternativ könnte man auch

$$a_n = \frac{\mathrm{i}^n + (-\mathrm{i})^n}{2}$$

schreiben. Mit dieser Darstellung gilt auch

$$\frac{-z}{2(z^2+1)} = \frac{-z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-a_{n-1}}{2}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n,$$

wobei

$$b_n := \begin{cases} 0, & \text{wenn } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{wenn } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{wenn } n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}.$$

Alternativ könnte man auch

$$b_n = \frac{\mathrm{i}}{4}(\mathrm{i}^n - (-\mathrm{i})^n)$$

schreiben. Wir setzen diese Summen in Gleichung (5.3.1) ein und erhalten

$$\frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n(n+1)}{2} + a_n + b_n\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,$$

wobei

$$c_n := \begin{cases} 1-2k, & \text{wenn } n = 4k,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ 2k, & \text{wenn } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ -2-2k, & \text{wenn } n = 4k+2,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ 2k+2, & \text{wenn } n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}.$$

Oder in kompakter Schreibweise

$$c_n = \frac{(2-\mathrm{i})\mathrm{i}^n + (2+\mathrm{i})(-\mathrm{i})^n - 2(-1)^n n}{4}.$$

Aufgabe 5.4 Unterschiede zwischen reeller und komplexer Analysis

Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine holomorphe Funktion als Potenzreihe darstellbar ist und man sie somit beliebig oft differenzieren kann. Zeige die folgenden beiden Aussagen.

(5.4a) Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar. Berechne die Ableitung und zeige, dass $f''(0)$ nicht existiert.

Lösung: Es ist klar, dass die erste Ableitung von f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert und stetig ist, da f als Polynom auf $x > 0$ und $x < 0$ gegeben ist. Desweiteren sieht man sofort, dass wir f' bei $x = 0$ durch $f'(0) = 0$ ergänzen können und damit eine stetig Ableitung erhalten. Diese ist

$$f'(x) := \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}.$$

Also ist f differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2|x|$.

Es ist auch klar, dass die zweite Ableitung von f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert und stetig ist. Wenn wir nun f'' bei $x = 0$ ergänzen wollen so können wir dies nicht auf eine stetige Art und Weise tun, da $f''(x) = 2$ und $f''(-x) = -2$ für $x > 0$. Insbesondere kann f' in $x = 0$ also nicht differenzierbar sein, da

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = -2 \neq 2 = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h}.$$

(5.4b) Die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

ist in $x = 0$ beliebig oft differenzierbar. Es gilt aber

$$g(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

für $x > 0$.

HINWEIS: Verwende, dass

$$\lim_{x \to \infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

gilt.

Lösung: Wir berechnen

$$g^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \qquad g^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{4-6x^2}{x^6} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

$$g^{(3)}(x) = \begin{cases} \frac{4(6x^4-9x^2+2)}{x^9} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Per Induktion sieht man, dass

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

wobei p_n ein Polynom ist. Wir haben dies für $n = 1$ nachgeprüft. Stimmt es für ein $n \in \mathbb{N}$, dann auch für $n + 1$, denn

$$\left(p_n(\tfrac{1}{x})\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \big(p_n(\tfrac{1}{x})\big)'\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}p_n(\tfrac{1}{x})\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{2}{x^3}p_n(\tfrac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}p_n'(\tfrac{1}{x})\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Setze $y = \frac{1}{x}$. Dann ist

$$p_{n+1}(y) = 2y^3p_n(y) - y^2p_n'(y)$$

ein Polynom, wie behauptet. Wegen des Hinweises $\lim_{y\to\infty} y^n e^{-y^2} = 0$ sehen wir

$$\lim_{x\downarrow 0} g^{(n)}(x) = \lim_{x\downarrow 0} p_n(\tfrac{1}{x})\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\infty} p_n(y)\mathrm{e}^{-y^2} = 0.$$

Hieraus folgt, dass g in $x = 0$ beliebig oft stetig differenzierbar ist. Desweiteren gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 \neq g(x)$$

für alle $x > 0$ per Definition von g.

Publiziert am 4. April.

Einzureichen am 13./14. April.

Letzte Modifikation: 15. April 2016