Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 6

Aufgabe 6.1 Die Cauchy Integralformel

Bestimme den Wert des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m (z-b)^n},$$

für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1 < |b|$ und $m, n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Der Integrand hat zwei Pole: a mit Vielfachheit m und b mit Vielfachheit n. Nur a liegt im Innern des Einheitskreises. Wir setzen also

$$f(z) := \frac{1}{(z-b)^n}.$$

Aus dem Satz über Potenzreihenentwicklung folgt

$$f^{(m-1)}(a) = \frac{(m-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m (z-b)^n}.$$

Wegen

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} f(z) = \frac{(-1)^{m-1} \cdot n(n+1)\dots(n+m-2)}{(z-b)^{n+m-1}}$$

ist

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^m (z-b)^n} &= \frac{2\pi \mathrm{i}}{(m-1)!} \cdot \frac{(-1)^{m-1} \cdot n(n+1)\dots(n+m-2)}{(a-b)^{n+m-1}} \\ &= \frac{2\pi \mathrm{i}(-1)^n}{(b-a)^{n+m-1}} \binom{n+m-2}{m-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2 Harmonische Funktionen

Der Laplace-Operator Δ für Funktionen $f(x, y)$ zweier reeller Veränderlicher ist gegeben durch

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f.$$

Wir nennen eine Funktion f *harmonisch*, wenn für alle x, y

$$\Delta f(x, y) = 0$$

gilt. Zeige:

(6.2a) Ist f holomorph, so ist f auch harmonisch.

Lösung: Aus der Cauchy-Riemann Gleichung

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{\partial}{\partial y}f$$

folgen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f = -\mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f = \mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f.$$

Mit dem Satz von Clairaut-Schwarz ist $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f$. Daher

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f = -\mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f + \mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f = 0.$$

(6.2b) Mit $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ gilt

$$\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f.$$

Verwende dies, um Aufgabe (6.2a) noch einmal zu lösen.

Lösung: Wir rechnen nach, dass

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}f + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}f\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f - \mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f\right) = \frac{1}{4}\Delta f$$

gilt. Wenn nun f holomorph ist, dann gilt per Definition, dass $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f = 0$ ist und damit

$$\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f = 0.$$

(6.2c) $f(z) := \overline{z}$ ist harmonisch, aber nicht holomorph.

Lösung: Wir berechnen

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}x - \mathrm{i}\frac{\partial^2}{\partial y^2}y = 0.$$

Desweiteren ist f offensichtlich nicht holomorph, wie man einfach mit der Wirtinger Ableitung oder der Cauchy-Riemann Gleichung prüfen kann.

(6.2d) Ist f harmonisch, so sind es auch $\overline{f}$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$.

Lösung: Wenn $f = u + \mathrm{i}v$ harmonisch ist, dann gilt

$$0 = \Delta f = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v \quad \Rightarrow \quad \Delta u = 0 = \Delta v.$$

Also sind $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ ebenfalls harmonisch. Daraus folgt aber auch

$$\Delta\overline{f} = \Delta u - \mathrm{i}\Delta v = 0,$$

womit $\overline{f}$ harmonisch ist.

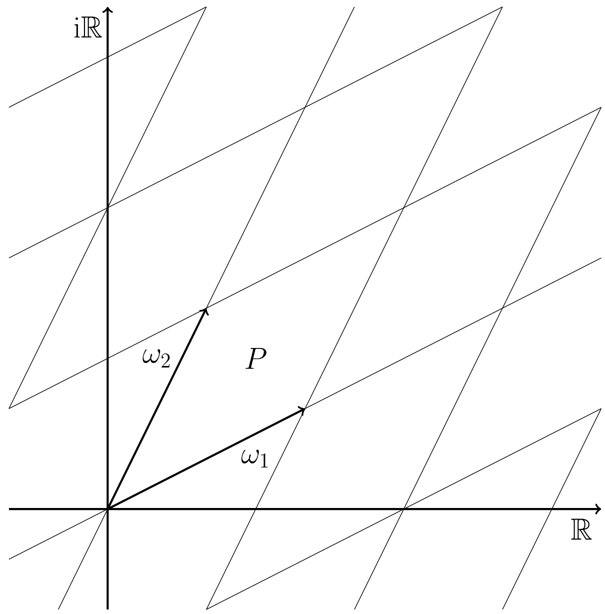

Abbildung 6.1: P und dessen Translate überdecken $\mathbb{C}$.

(6.2e) $f(x,y) := x^2 - y^2$ ist harmonisch. Desweiteren ist f der Realteil einer holomorphen Funktion.

Lösung: f ist offensichtlich harmonisch. Ausserdem gilt

$$f(x,y) = \mathrm{Re}(x + \mathrm{i}y)^2.$$

Also ist f der Realteil der Funktion z^2, welche holomorph ist.

(6.2f) $g(x,y) := x^2 + y^2$ ist nicht der Realteil einer holomorphen Funktion.

Lösung: g ist offensichtlich nicht harmonisch. Da jede holomorphe Funktion harmonisch ist (laut Aufgabe (6.2a)) und der Realteil jeder harmonischen Funktion auch harmonisch ist (laut Aufgabe (6.2d)) kann g also nicht der Realteil einer holomorphen Funktion sein.

Aufgabe 6.3 Elliptische Funktionen und der Satz von Liouville

Eine Funktion f heisst *elliptisch*, falls es $\omega_1 \neq 0$ und $\omega_2 \neq 0$ gibt mit $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, sodass

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2), \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Wir nennen ω_1 und ω_2 die *Perioden* von f. Zeige:

(6.3a) Eine elliptische Funktion ist durch ihre Werte auf dem Parallelogramm

$$P := \{z \in \mathbb{C} \mid z = s\omega_1 + t\omega_2,\ 0 \leq s, t \leq 1\}$$

bestimmt (siehe Abbildung 6.1).

Lösung: Wir nehmen an die Werte einer elliptischen Funktion f mit Perioden $\omega_1 \neq 0$ und $\omega_2 \neq 0$ - sodass $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ - seien auf dem Parallelogramm P gegeben. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass wir damit die Werte von f auf der ganzen komplexen Zahlenebene bestimmen können.

In einem ersten Schritt wollen wir zeigen, dass ω_1 und ω_2 die komplexe Ebene aufspannen. Dies folgt aber sofort aus den Bedingungen $\omega_1 \neq 0 \neq \omega_2$ und $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, da letztere impliziert, dass ω_1 und ω_2 tatsächlich in unterschiedliche Richtungen zeigen: In Polarform mit $r_j > 0$ und $\phi_j \in [0, 2\pi)$ ist

$$\omega_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}, \quad \omega_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1 - \phi_2)}.$$

Die Bedingung ist also äquivalent zu $\phi_1 \neq \phi_2$.

Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig, dann finden wir $\epsilon, \eta \in \mathbb{R}$ sodass

$$z = \epsilon\omega_1 + \eta\omega_2.$$

Nun schreiben wir $\epsilon = \lfloor \epsilon \rfloor + s$ und $\eta = \lfloor \eta \rfloor + t$, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion bezeichnet und $0 \leq t, s < 1$ gilt. Damit haben wir

$$f(z) = f(\epsilon\omega_1 + \eta\omega_2) = f((\lfloor \epsilon \rfloor + s) \cdot \omega_1 + (\lfloor \eta \rfloor + t) \cdot \omega_2) = f(s\omega_1 + t\omega_2),$$

mit $s\omega_1 + t\omega_2 \in P$. Also ist die Aussage gezeigt.

(6.3b) Jede ganze elliptische Funktion ist konstant.

Lösung: Wir haben in Aufgabe (6.3a) gezeigt, dass jede elliptische Funktion f mit Perioden ω_1 und ω_2 alle ihre Werte bereits in P annimmt. Dies wollen wir nun benutzen. Da f keine Pole hat, ist f holomorph also insbesondere stetig. Desweiteren ist P beschränkt und abgeschlossen woraus wir folgern, dass f ihr Maximum auf P annimmt. Insbesondere ist f also auf P (und deswegen überall) beschränkt. Mit dem Satz von Liouville folgt nun die Aussage.

Aufgabe 6.4 Die Weierstrass $\wp$-Funktion

Seien $\omega_1 \neq 0 \neq \omega_2$ und $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right).$$

(6.4a) Rechne nach, dass $\wp$ elliptisch mit den Perioden ω_1 und ω_2 ist.

HINWEIS: Die Konvergenz der Summe über $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ darf man ohne Beweis annehmen.

Lösung: $\wp$ ist offensichtlich meromorph. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
\wp(z + \omega_1; \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(z + \omega_1)^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z + (m+1)\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z + m\omega_1 + n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)
\end{aligned}$$

und $\wp(z + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$ auf ähnliche Art und Weise. Also ist $\wp$ elliptisch.

(6.4b) Bestimme die Pole von $\wp$ und deren Vielfachkeit.

Lösung: Man sieht sofort, dass die Pole von $\wp$ gegeben sind durch

$$m\omega_1 + n\omega_2, \qquad (m,n) \in \mathbb{Z}$$

und jeweils Vielfachkeit 2 haben.

Publiziert am 11.April.
Einzureichen am 20./21. April.

Letzte Modifikation: 28. April 2016