Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 7

Aufgabe 7.1 Aus dem Beweis des Identitätssatzes

Sei f eine ganze Funktion und $z_0 \in \mathbb{C}$. Gilt $f^{(k)}(z_0) = 0$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $f = 0$.

Lösung: Da f ganz ist, kann f als Potenzreihe dargestellt werden. Diese Potenzreihe ist überall konvergent, egal um welchen Punkt z_0 wir entwickeln. Insbesondere gilt also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Daraus folgt sofort, dass $f(z) = 0$, für alle $z \in \mathbb{C}$ und die Aussage ist gezeigt.

Aufgabe 7.2 Pole Erster Ordnung

Betrachte $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorph.

(7.2a) Sei $p \in \mathbb{C}$ ein Pol n-ter Ordnung von f. Berechne

$$\mathrm{Res}_p \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Lösung: Wir können f schreiben als

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-p)^n},$$

wobei g eine Funktion ist, die in einer Umgebung von p holomorph ist und keine Nullstellen hat. Damit berechnen wir

$$f'(z) = \frac{g'(z)(z-p) - ng(z)}{(z-p)^{n+1}},$$

und somit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)(z-p) - ng(z)}{g(z)(z-p)} =: \frac{\eta(z)}{\xi(z)}.$$

Wir bemerken, dass die Funktion ξ eine Nullstelle erster Ordnung in p hat. Deshalb gilt

$$\mathrm{Res}_p \frac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{Res}_p \frac{\eta(z)}{\xi(z)} = \frac{\eta(p)}{\xi'(p)} = -n.$$

(7.2b) Sei $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle n-ter Ordnung von f. Berechne

$$\mathrm{Res}_a \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Lösung: Ähnlich wie zuvor können wir f schreiben als

$$f(z) = (z-a)^n g(z),$$

wobei g eine Funktion ist, die in einer Umgebung von a keine weiteren Nullstellen hat und holomorph ist. Daraus berechnen wir

$$f'(z) = ng(z)(z-a)^{n-1} + g'(z)(z-a)^n,$$

und somit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{ng(z) + g'(z)(z-a)}{g(z)(z-a)} =: \frac{\eta(z)}{\xi(z)}.$$

Wie zuvor bemerken wir, dass ξ eine Nullstelle erster Ordnung in a hat und errechnen

$$\mathrm{Res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{Res}_a \frac{\eta(z)}{\xi(z)} = \frac{\eta(a)}{\xi'(a)} = n.$$

Aufgabe 7.3 Pole und Residuen

Bestimme alle Pole und Residuen von:

(7.3a) $\frac{z^2}{z^4-1}$

Lösung: Wir zerlegen den Nenner

$$z^4 - 1 = (z+1)(z-1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i}).$$

Also hat $\frac{z^2}{z^4-1}$ vier Pole erster Ordnung bei $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \mathrm{i}$ und $z_4 = -\mathrm{i}$. Wir definieren

$$f(z) := z^2, \qquad g(z) := z^4 - 1$$

und berechnen die Residuen mit der Formel

$$\mathrm{Res}_{z_j} \frac{f}{g} = \frac{f(z_j)}{g'(z_j)}, \qquad j = 1, \dots, 4.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_1 \frac{z^2}{z^4-1} &= \frac{1}{4}, & \qquad \mathrm{Res}_{-1} \frac{z^2}{z^4-1} &= -\frac{1}{4}, \\ \mathrm{Res}_{\mathrm{i}} \frac{z^2}{z^4-1} &= \frac{1}{4\mathrm{i}}, & \qquad \mathrm{Res}_{-\mathrm{i}} \frac{z^2}{z^4-1} &= -\frac{1}{4\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

(7.3b) $\frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}$

Lösung: Wir zerlegen den Nenner erneut

$$z(z^2+1)^2 = z(z+\mathrm{i})^2(z-\mathrm{i})^2.$$

Also hat $\frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}$ drei Pole bei $z_1 = 0$, $z_2 = \mathrm{i}$ und $z_3 = -\mathrm{i}$. Der Pol bei z_1 hat dabei Ordnung 1 und die anderen beiden Ordnung 2. Um das Residuum bei z_1 zu berrechnen setzen wir

$$f(z) := z^2 + z + 5, \qquad g(z) := z(z^2+1)^2$$

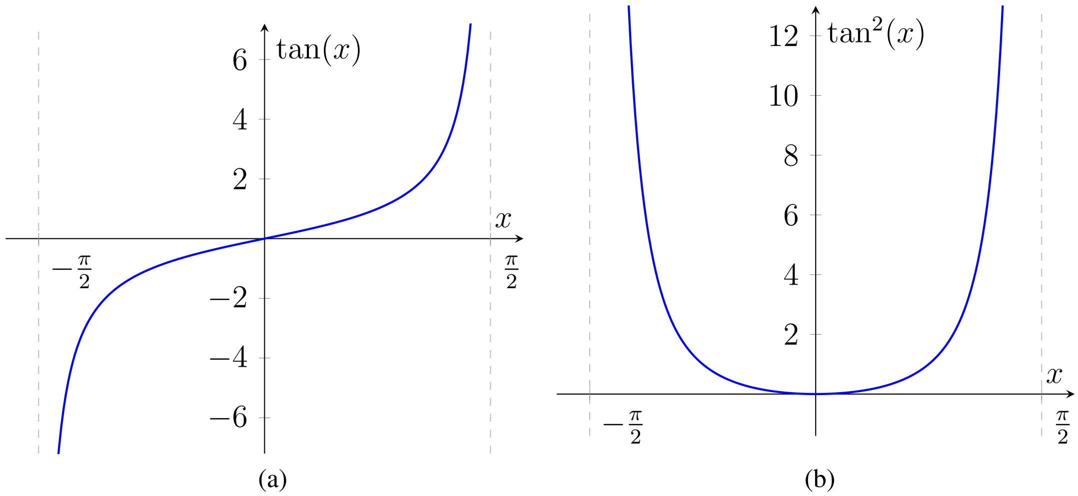

Abbildung 7.1: Der Tangens (a) und sein Quadrat (b).

und berechnen

$$\mathrm{Res}_0 \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2} = \frac{f(0)}{g'(0)} = 5.$$

Für die anderen beiden Residuen verwenden wir die Formel

$$\mathrm{Res}_{z_j} h = \lim_{z \to z_j} ((z-z_j)^2 h(z))', \qquad j = 2, 3,$$

wobei $h(z) = \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathrm{i}} \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2} &= \lim_{z \to \mathrm{i}} \left(\frac{z^2+z+5}{z(z+\mathrm{i})^2} \right)' \\
= \lim_{z \to \mathrm{i}} &\frac{(2z+1)z(z+\mathrm{i})^2 - (z^2+z+5)((z+\mathrm{i})^2 + 2z(z+\mathrm{i}))}{z^2(z+\mathrm{i})^4} \\
&= \frac{-4\mathrm{i}(2\mathrm{i}+1) + 8(4+\mathrm{i})}{-16} = -\frac{5}{2} - \frac{\mathrm{i}}{4}.
\end{aligned}$$

In der exakt selben Manier ergibt sich

$$\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}} \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2} = -\frac{5}{2} + \frac{\mathrm{i}}{4}.$$

(7.3c) $\tan(z)$

Lösung: Der Tangens kann definiert werden durch

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

Deswegen hat $\tan(z)$ Singularitäten an den Punkten

$$z_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Wir wollen zeigen, dass dies alles Pole erster Ordnung sind und tun dies indem wir folgenden Grenzwert betrachten:

$$\lim_{z\to z_n}(z-z_n)\tan(z)=\sin(z_n)\lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{\cos(z)-\cos(z_n)}=\sin(z_n)\frac{1}{(\cos(z_n))'}=-1.$$

Wenn wir nun $f(z) := \sin(z)$ und $g(z) := \cos(z)$ definieren so erhalten wir

$$\mathrm{Res}_{z_n}\tan=\frac{f(z_n)}{g'(z_n)}=-1.$$

(7.3d) $\tan^2(z)$

Lösung: Für das Quadrat des Tangens erhalten wir die Pole zweiter Ordnung

$$z_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad n\in\mathbb{Z},$$

dank der Überlegungen aus Aufgabe (7.3c). Die Rechnung für die zugehörigen Residuen wird deutlich einfacher wenn wir bemerken, dass $\tan^2(z+\pi)=\tan^2(z)$ für alle $z\in\mathbb{C}$. Es reicht dann nämlich das Residuum bei z_0 zu berechnen. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z_n}\tan^2=\mathrm{Res}_{z_0}\tan^2&=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\tan^2(z)\right)'=\lim_{z\to 0}\left(z^2\tan^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right)'\\&=\lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{\cos^2(z)}{\sin^2(z)}\right)'=\lim_{z\to 0}\frac{2z\cos(z)}{\sin(z)}\left(\frac{\cos(z)}{\sin(z)}-z-\frac{z\cos^2(z)}{\sin^2(z)}\right)\\&=2\lim_{z\to 0}\frac{\cos(z)\sin(z)-z\cos^2(z)}{\sin^2(z)}.\end{aligned}$$

Unter der Hilfe des Satzes von Taylor erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\cos(z)\sin(z)-z\cos^2(z)}{\sin^2(z)}&=\frac{(1+\mathcal{O}(z^2))(z+\mathcal{O}(z^3))-z(1+\mathcal{O}(z^2))^2}{\mathcal{O}(z)^2}\\&=\frac{z+\mathcal{O}(z^3)-z+\mathcal{O}(z^3)}{\mathcal{O}(z^2)}\xrightarrow[z\to 0]{}0.\end{aligned}$$

Also

$$\mathrm{Res}_{z_n}\tan^2=0.$$

(7.3e) $\tan^3(z)$

Lösung: Das Argument ist im Wesentlichen analog zu dem aus Aufgabe (7.3d). Die Pole von $\tan^3$ haben Ordnung 3 und liegen bei

$$z_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Auch hier gilt $\tan^3(z+\pi)=\tan^3(z)$, für alle $z\in\mathbb{C}$ und somit berechnen wir

$$\mathrm{Res}_{z_n}\tan^3=\mathrm{Res}_{z_0}\tan^3=\frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3\tan^3(z)\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(z^3\tan^3\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right)''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(-z^3\frac{\cos^3(z)}{\sin^3(z)}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-6z\cot(z)}{\sin^4(z)}\left(z^2+(z^2+\sin^2(z))\cos^2(z)-3z\sin(z)\cos(z)\right).$$

Mit einer Taylorentwicklung erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^4(z)}\big(z^2+(z^2+\sin^2(z))\cos^2(z)-3z\sin(z)\cos(z)\big)\\
&=\frac{1}{(z+\mathcal{O}(z^3))^4}\left[z^2+\left(z^2+\left(z-\frac{z^3}{6}+\mathcal{O}(z^5)\right)^2\right)\left(1-\frac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^4)\right)^2\right.\\
&\qquad\left.-3z\left(z-\frac{z^3}{6}+\mathcal{O}(z^5)\right)\left(1-\frac{z^2}{2}+\mathcal{O}(z^4)\right)\right]\\
&=\frac{1}{z^4+\mathcal{O}(z^6)}\left[z^2+\left(z^2+z^2-\frac{z^4}{3}+\mathcal{O}(z^6)\right)(1-z^2+\mathcal{O}(z^4))\right.\\
&\qquad\left.-3z\left(z-\frac{2z^3}{3}+\mathcal{O}(z^5)\right)\right]\\
&=\frac{1}{z^4+\mathcal{O}(z^6)}\left[-2z^2+2z^4+\mathcal{O}(z^6)+\left(2z^2-\frac{z^4}{3}-2z^4+\mathcal{O}(z^6)\right)\right]\\
&=-\frac{1}{3}\frac{z^4+\mathcal{O}(z^6)}{z^4+\mathcal{O}(z^6)}\xrightarrow[z\to 0]{}-\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$\operatorname{Res}_{z_n}\tan^3=1.$$

Aufgabe 7.4 Laurentreihen und Residuen

Berechne $\operatorname{Res}_0(f)$ für

$$f(z):=\exp\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Lösung: Unter Benutzung der bekannten Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und der Cauchyschen Produktformel folgt

$$
\begin{aligned}
\exp\left(z+\frac{1}{z}\right)&=\exp(z)\cdot\exp\left(\frac{1}{z}\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^{2k-n}}{k!(n-k)!}=:\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m z^m.
\end{aligned}
$$

Per Definition des Residuums gilt $\operatorname{Res}_0(f)=a_{-1}$. Also betrachten wir $2k-n=-1$ und somit $k=\frac{n-1}{2}$ für ungerade n. Wir summieren also über $n=2\ell+1$ für $\ell\in\mathbb{N}_0$ und haben deshalb $k=\ell$. Wir erhalten

$$\operatorname{Res}_0(f)=a_{-1}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!(\ell+1)!}.$$

Publiziert am 18.April.

Einzureichen am 27./28. April.

Letzte Modifikation: 28. April 2016