Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2016

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 8

Aufgabe 8.1 Umlaufzahlen Berechnen - Teil I

Das Ziel der Aufgabe ist es die Umlaufzahlen in vier Zyklen zu berechnen. Damit klar ist was genau gemacht werden soll, gibt es zu jeder Teilaufgabe ein kleines Beispiel.

(8.1a) Zeichne vier jeweils verschiedene Zyklen.

Als Beispiel betrachte den Zyklus in Abbildung 8.1.

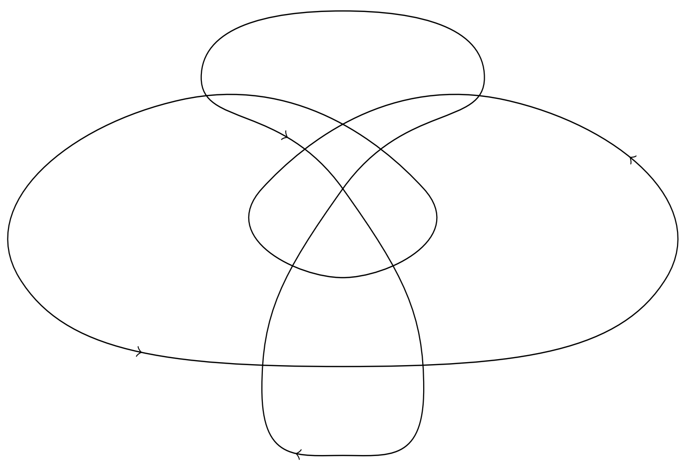

Abbildung 8.1: Ein Beispiel für einen Zyklus.

(8.1b) Berechne alle vorkommenden Umlaufzahlen innerhalb der vier Zyklen, die du in Aufgabe (8.1a) gezeichnet hast.

Für den Zyklus in Abbildung 8.1 sähe das so aus wie in Abbildung 8.2.

Aufgabe 8.2 Umlaufzahlen Berechnen - Teil II

Fixiere $n, k \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ mit $r \neq 1$. Bestimme die Umlaufzahl des geschlossenen Weges

$$\gamma(t) := \mathrm{e}^{2\pi int} + r\mathrm{e}^{2\pi ikt}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

um den Nullpunkt. In anderen Worten: Bestimme $\operatorname{ind}_\gamma(0)$.

HINWEIS: Gibt es eine Homotopie, welche den kleineren Kreis auf null zusammenzieht, ohne dabei über den Ursprung zu gehen?

Lösung: Zuerst wollen wir den Fall $r < 1$ untersuchen. Wir betrachten den Hinweis und merken, dass es eine Homotopie $H : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ gibt, welche den kleineren der beiden Kreise auf null zusammenzieht. Diese ist gegeben durch

$$H(\lambda, t) := \lambda(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}nt} + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kt}) + (1-\lambda)(1+r)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}nt}.$$

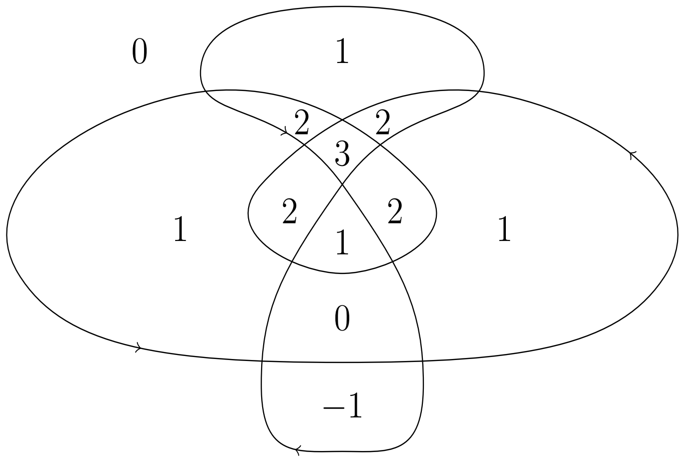

Abbildung 8.2: Der Zyklus aus Abbildung 8.1 mit Umlaufzahlen.

Um zu überprüfen, dass dies eine Homotopie ist, bemerken wir zuerst, dass H stetig ist. Desweiteren gilt

$$H(0,t) = (1+r)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nt}, \qquad H(1,t) = \gamma(t), \qquad H(\lambda,0) = 1+r = H(\lambda,1).$$

und somit ist H eine Homotopie. Nun wollen wir die Homotopieversion des Satzes von Cauchy anwenden (siehe zum Beispiel: Freitag, Busam: 'Funktionentheorie 1', dritte Auflage, Theorem A5, s. 236). Betrachte zuerst einmal das Integral, welches wir berechnen wollen

$$\mathrm{ind}_\gamma(0) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Man sieht also, dass wir, um die Homotopieversion des Integralsatzes zu nutzen, zuerst zeigen müssen, dass unsere Homotopie nicht durch die Singularität bei null geht. Betrachte also

$$H(\lambda,t) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nt} + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kt}) = -(1-\lambda)(1+r)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nt}.$$

Dies ist der Fall genau dann, wenn

$$\lambda = \frac{1+r}{r} \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(k-n)t}}.$$

Diese Gleichung kann aber nicht gelten für $\lambda \in (0,1)$, da $t = \frac{1}{2}$ gelten muss, damit die rechte Seite überhaupt eine reelle Zahl ist und somit

$$\lambda = \frac{1+r}{2r} > 1.$$

Nun können wir also die Homotopieversion des Satzes von Cauchy anwenden und erhalten

$$\mathrm{ind}_\gamma(0) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{H(1,\cdot)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{H(0,\cdot)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = n.$$

Für den zweiten Fall ($r > 1$) können wir nun ein sehr ähnliches Argument anführen, um zu zeigen, dass

$$\mathrm{ind}_\gamma(0) = k.$$

Die Homotopie ist in diesem Falle, gegeben durch

$$H(\lambda,t) := \lambda(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} nt} + r\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kt}) + (1-\lambda)(1+r)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kt}.$$

Aufgabe 8.3 Anwendungen des Residuensatzes

(8.3a) Betrachte die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}$$

und die Wege

$$\gamma_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi k}{2}} + \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Berechne die Integrale

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Lösung: Wir berechnen die Residuen in den beiden Polen $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$ von f. Bemerke dazu, dass beide Pole Vielfachkeit 1 haben und dass wir deswegen mit $g(z) := z^2 + 1$ haben, dass

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}} f = \frac{1}{g'(\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}},$$
$$\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}} f = \frac{1}{g'(-\mathrm{i})} = \frac{-1}{2\mathrm{i}}$$

gilt. Nun wenden wir den Residuensatz an und erhalten

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}_{\mathrm{i}}(f)\cdot \mathrm{ind}_{\gamma_1}(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot 1 = \pi, \qquad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$
$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}_{-\mathrm{i}}(f)\cdot \mathrm{ind}_{\gamma_3}(-\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{-1}{2\mathrm{i}}\cdot 1 = -\pi, \qquad \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(8.3b) Betrachte erneut

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

Diesmal definieren wir den Weg

$$\gamma(t) := 2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Berechne erneut den Wert von

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Lösung: Wir benutzen, was wir in Aufgabe (8.3a) bereits berechnet haben und bekommen daher mit dem Residuensatz

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}(f)\cdot\mathrm{ind}_{\gamma}(\mathrm{i}) + \mathrm{Res}_{-\mathrm{i}}(f)\cdot\mathrm{ind}_{\gamma}(-\mathrm{i})) = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\right) = 0.$$

(8.3c) Bestimme die Menge der Nullstellen der Funktion

$$f(z) := \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} - 1.$$

Lösung: Wir bemerken, dass die Funktion f eine Nullstelle in $z \in \mathbb{C}$ hat genau dann, wenn

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1.$$

Man sieht also leicht, dass die Nullstellenmenge der Funktion f gegeben ist durch

$$N := \left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}.$$

(8.3d) Wir definieren den Weg

$$\gamma(t) := \mathrm{i} + \frac{7}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Berechne das Integral

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}-1)}\,\mathrm{d}z.$$

Lösung: Der Weg γ entspricht der Parametrisierung des Kreises mit Mittelpunkt $z_0 = \mathrm{i}$ und Radius $r = \frac{7}{8}$. Somit ist insbesondere $z_1 = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}$ die einzige Nullstelle des Nenners die von γ umlaufen wird, da der Nenner genau $z^2 f(z)$ entspricht, wobei f wie in Aufgabe (8.3c) definiert ist. Um das Residuum des Integranden an z_1 zu berechnen, bemerken wir, dass

$$f'(z_1) = \frac{-1}{z_1^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z_1}} = 4\pi^2 \neq 0$$

gilt. Somit ist z_1 ein Pol erster Ordnung und wir erhalten mit $g(z) := z^2 f(z)$, dass

$$\mathrm{Res}_{z_1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}-1)} = \frac{1}{g'(z_1)} = \frac{1}{2z_1 f(z_1) + z_1^2 f'(z_1)} = -1$$

gilt. Wir wenden nun den Residuensatz an und erhalten

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{Res}_{z_1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}-1)}\right) \cdot \mathrm{ind}_\gamma(z_1) = -2\pi\mathrm{i}.$$

(8.3e) Betrachte

$$f(z) := \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

Welche Werte kann

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

annehmen, wenn γ irgendein geschlossener Weg ist, der weder $z_1 = 1$ noch $z_2 = 2$ durchläuft?

Lösung: Wir berechnen zuerst die Residuen in den Polen erster Ordnung $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$. Diese sind

$$\mathrm{Res}_1 f = -1, \qquad \mathrm{Res}_2 f = 2.$$

Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}_1(f)\cdot \mathrm{ind}_\gamma(1) + \mathrm{Res}_2(f)\cdot \mathrm{ind}_\gamma(2)).$$

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass $\mathrm{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{im}(\gamma)\}$. Wir folgern daraus, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \in \{2\pi\mathrm{i}n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Das Integral kann also alle Werte aus $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ annehmen.

Aufgabe 8.4 Der Satz von Casorati-Weierstrass

Das Ziel der Aufgabe ist es den Satz von Casorati-Weierstrass zu beweisen. Bevor wir dies in Angriff nehmen sind zwei Definitionen von Nöten:

- Eine Singularität einer Funktion f heisst *wesentlich*, wenn sie weder hebbar noch ein Pol ist. Ein gutes Beispiel dafür ist die Funktion $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, welche in $z = 0$ eine Singularität hat, die weder ein Pol noch hebbar ist.

- Eine Menge M heisst *dicht*, wenn jeder Ball $B_r(z_0)$, für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, einen Punkt aus M enthält.

Der Satz von Casorati-Weierstrass lautet:

Sei $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und

$$B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$$

eine punktierte ϵ-Umgebung von z_0, für $\epsilon > 0$. Dann gilt, dass

$$M := f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$$

dicht in $\mathbb{C}$ ist.

HINWEIS: Wenn der Satz von Casorati-Weierstrass nicht gilt, so gibt es ein $\delta > 0$ und ein $\omega_0 \in \mathbb{C}$, sodass $B_\delta(\omega_0)$ keinen Punkt aus M enthält. Schliesse aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz, dass

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - \omega_0}$$

in z_0 eine hebbare Singularität hat.

Lösung: Wir folgen dem Hinweis. Beachte, dass f nicht konstant ist, denn sonst wäre die Singularität in z_0 sicher hebbar. Wenn $B_\delta(\omega_0)$ keine Punkte aus M enthält, so ist h beschränkt in $B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ (um genau zu sein durch $\frac{1}{\delta}$). Dank dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist die Singularität von h in z_0 hebbar. Damit ist $h(z_0) \neq 0$ oder z_0 ist eine Nullstelle endlicher Ordnung, (wäre z_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung, dann wäre $h(z) \equiv 0$, und somit wäre auch $f(z)$ konstant). Damit folgt aber nun, dass

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + \omega_0$$

in z_0 auch keine wesentliche Singularität haben kann, denn $f(z_0)$ ist entweder definiert oder z_0 ist ein Pol endlicher Ordnung.

Publiziert am 25.April.

Einzureichen am 4. Mai.

Letzte Modifikation: 5. Mai 2016