Dr. T. Bühler
M. Wellershoff

# Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

## Serie 9

### Aufgabe 9.1

Berechne die Integrale:

**(9.1a)**

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z$$

**Lösung:** Wir bemerken, dass $z_1 = 0$ der einzige Pol des Integranden ist. Da $z_1$ ein Pol erster Ordnung ist berechnet sich das Residuum an $z_1$ zu

$$\mathrm{Res}_{z_1}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right) = 1.$$

Mit Hilfe des Residuensatzes gilt nun

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{Res}_0\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)\cdot \mathrm{ind}_\gamma(0) = 2\pi\mathrm{i},$$

wobei $\gamma$ definiert ist durch

$$\gamma(t) := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

**(9.1b)**

$$\int_{|z|=3} \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)^2(z-1)^3}$$

**Lösung:** Die Pole des Integranden liegen bei $z_1 = 2$ und $z_2 = 1$ und haben die Ordnung $2$ respektive $3$. Wir berechnen also die Residuen durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_1}\left(\frac{1}{(z-2)^2(z-1)^3}\right) &= \lim_{z\to 2}\left((z-2)^2\cdot\frac{1}{(z-2)^2(z-1)^3}\right)' = \lim_{z\to 2}\frac{-3}{(z-1)^4} = -3,\\
\mathrm{Res}_{z_2}\left(\frac{1}{(z-2)^2(z-1)^3}\right) &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\left((z-1)^3\cdot\frac{1}{(z-2)^2(z-1)^3}\right)'' = \lim_{z\to 1}\frac{6}{2(z-2)^4} = 3.
\end{aligned}$$

Dank des Residuensatzes gilt nun

$$\int_{|z|=3} \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)^2(z-1)^3} = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)^2(z-1)^3} = 2\pi\mathrm{i}(3\cdot 1 - 3\cdot 1) = 0,$$

wobei $\gamma$ definiert ist durch

$$\gamma(t) := 3\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

## Aufgabe 9.2

Berechne die folgenden Integrale.

**(9.2a)**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5 - 3\cos t}$$

**Lösung:** In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass wir ein Integral der Form

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$$

mit Hilfe des Residuensatzes berechnen können. Dazu benutzen wir die Substitution $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ und $\cos t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Wenn wir

$$\gamma(t) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

definieren, so erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5 - 3\cos t} = \int_\gamma \frac{1}{5 - \frac{3}{2}(z + z^{-1})} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i} \cdot \int_\gamma \frac{1}{\frac{3}{2}z^2 - 5z + \frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z =$$
$$\frac{2\mathrm{i}}{3} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)} = -\frac{4\pi}{3} \cdot \mathrm{Res}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)}\right) = -\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{-3}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

Im vierten Schritt haben wir dabei den Residuensatz angewendet. Bemerke, dass $z_1 = \frac{1}{3}$ der einzige Pol des Integranden im Einheitskreis ist und dass $z_1$ das Residuum $\frac{-3}{8}$ hat.

**(9.2b)**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(5 - 3\sin t)^2}$$

**Lösung:** Ähnlich wie in der vorhergehenden Aufgabe haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(5 - 3\sin t)^2} &= \int_\gamma \frac{1}{(5 + \mathrm{i}\frac{3}{2}(z - z^{-1}))^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{-\mathrm{i}z}{\left(\frac{3\mathrm{i}}{2}(z - \frac{1}{3}\mathrm{i})(z - 3\mathrm{i})\right)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{4\mathrm{i}}{9} \int_\gamma \frac{z}{(z - \frac{1}{3}\mathrm{i})^2 (z - 3\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

wobei $\gamma$ erneut gegeben ist durch

$$\gamma(t) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

und wir $\sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z - z^{-1})$ ausnutzen. Der einzige Pol des Integranden innerhalb des Einheitskreises liegt bei $z_1 = \frac{i}{3}$. Da $z_1$ zweiter Ordnung ist berechnet sich das Residuum zu

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z_1}\left(\frac{z}{(z - \frac{1}{3}\mathrm{i})^2 (z - 3\mathrm{i})^2}\right) &= \lim_{z \to \frac{\mathrm{i}}{3}} \left(\left(z - \frac{\mathrm{i}}{3}\right)^2 \cdot \frac{z}{(z - \frac{1}{3}\mathrm{i})^2 (z - 3\mathrm{i})^2}\right)' \\ &= \lim_{z \to \frac{\mathrm{i}}{3}} \frac{(z - 3\mathrm{i})^2 - 2z(z - 3\mathrm{i})}{(z - 3\mathrm{i})^4} = -\frac{45}{256}.\end{aligned}$$

Mit dem Residuensatz gilt also

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(5-3\sin t)^2} = -2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{4\mathrm{i}}{9}\cdot\frac{45}{256}\cdot 1 = \frac{5\pi}{32}.$$

## Aufgabe 9.3

Berechne

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, \qquad \text{für } 0 < a < \infty.$$

**Lösung:** Zuerst wollen wir beweisen, dass das uneigentliche Integral überhaupt existiert. Bemerke dazu, dass

$$x^2 \frac{1}{(x^2+a^2)^2} \le \frac{1}{4a^2},$$

für $x \ge 0$. Deswegen gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} \le \frac{1}{a^4} + \frac{1}{4a^2}\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} < \infty.$$

Nun da wir wissen, dass das Integral existiert können wir es berechnen. Dazu benutzen wir zuerst, dass der Integrand gerade ist und erhalten

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}.$$

Nun müssen wir einen schlauen Weg finden, so dass wir das Integral als ein komplexes Wegintegral auffassen können (dann können wir nämlich den Residuensatz anwenden). Der Weg $\gamma_R$, den wir betrachten werden, ist gegeben aus zwei Teilen die hintereinander durchlaufen werden

$$\gamma_{1,R}(t) := t, \qquad -R \le t \le R,$$
$$\gamma_{2,R}(t) := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad 0 \le t \le \pi,$$

mit $R > 0$. Betrachte Abbildung 9.1, um ein besseres Bild zu bekommen wie $\gamma_R$ genau aussieht. Es gilt

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \int_{\gamma_{1,R}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2}.$$

Wir betrachten die drei Integrale einzeln und beginnen mit dem auf der rechten Seite.

Ist $R > a$, so ist genau eine Polstelle des Integranden ($z_1 = \mathrm{i}a$) im Innern von $\gamma_R$ enthalten. Bemerke, dass diese Polstelle Ordnung 2 hat und dass wir deswegen das Residuum durch

$$\operatorname{Res}_{z_1}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^2}\right) = \lim_{z\to\mathrm{i}a}\left((z-\mathrm{i}a)^2\frac{1}{(z^2+a^2)^2}\right)' = -\frac{\mathrm{i}}{4a^3}$$

berechnen können. Mit dem Residuensatz gilt also

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = -2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{i}}{4a^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

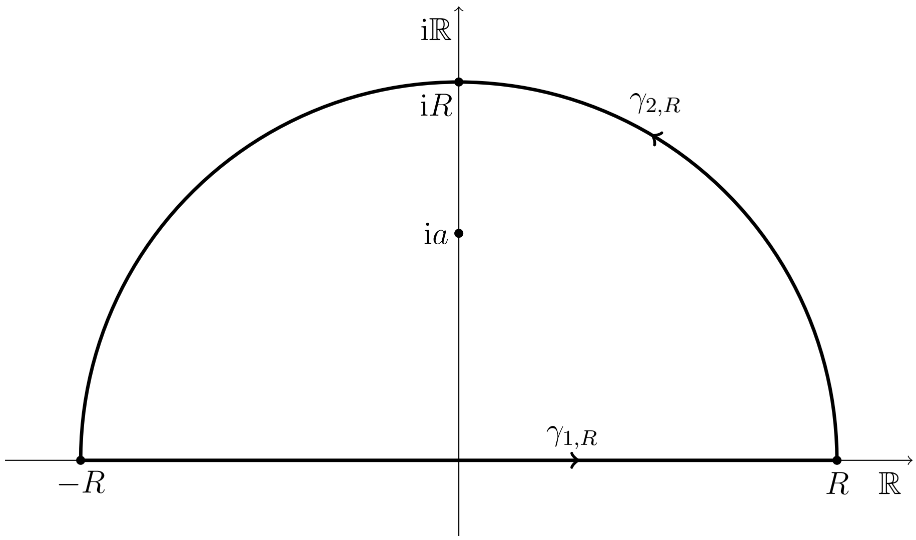


Abbildung 9.1: Der Integrationsweg $\gamma_R$ bestehend aus den Teilen $\gamma_{1,R}$ und $\gamma_{2,R}$.

Bemerke insbesondere, dass dieses Integral unabhängig von $R$ ist (solange $R > a$ gilt).

Wir betrachten nun das nächste Integral von rechts und sehen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{1,R}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2}.$$

Es bleibt das Integral auf der linken Seite zu berechnen. Wir haben

$$\left| \int_{\gamma_{2,R}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+a^2)^2} \, \mathrm{d}t \right| \le \int_0^{\pi} \frac{R}{\left|R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+a^2\right|^2} \, \mathrm{d}t.$$

Man sieht recht einfach ein, dass

$$\left|R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}+a^2\right| \ge (R^2-a^2)$$

gilt, wenn $R > a$ (am besten macht man hierzu eine Skizze). Damit haben wir dann

$$\left| \int_{\gamma_{2,R}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} \right| \le \frac{\pi R}{(R^2-a^2)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Mit diesen drei Rechnungen können wir nun das gewünschte Integral berechnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} &= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{1,R}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \left\{ \int_{\gamma_{1,R}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} \right\} \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}. \end{aligned}$$

Und deswegen

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$$

## Aufgabe 9.4

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n+2 \geq 2$ gegeben. Berechne das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x.$$

HINWEIS: Integriere über den Rand eines geeigneten Kreissektors.

**Lösung:** Wie zuvor beweisen wir zuerst, dass das Integral, welches wir berechnen sollen, überhaupt existiert. Wir sehen

$$x^2\frac{x^n}{x^m+1} \leq 1,$$

für $x \geq 1$. Deswegen gilt

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x \leq 1 + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} < \infty$$

und das Integral existiert. Nun folgen wir dem Hinweis und sehen, dass die Polstellen des Integranden gegeben sind durch

$$z_\ell := \mathrm{e}^{\frac{(2\ell-1)\pi\mathrm{i}}{m}}, \qquad \ell = 1, \dots, m.$$

Wir wollen also einen Weg $\gamma_R$ finden, der nur eine dieser Polstellen einschliesst. Ein solcher ist gegeben durch das Hintereinanderlegen der Teilstücke

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,R}(t) &:= t, \qquad 0 \leq t \leq R,\\
\gamma_{2,R}(t) &:= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{m},\\
\gamma_{3,R}(t) &:= \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}} \cdot (R-t), \qquad 0 \leq t \leq R,
\end{aligned}$$

wobei $R > 1$ (siehe Abbildung 9.2 für eine Visualisierung). Es gilt

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{1,R}} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{3,R}} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z.$$

Wir betrachten die vier Integrale einzeln.

Da $R > 1$ ist, liegt genau eine Polstelle des Integranden im Innern des Weges $\gamma_R$. Diese Polstelle ist $z_1$ und hat die Ordnung $1$. Damit ergibt sich für das Residuum

$$\operatorname{Res}_{z_1}\left(\frac{z^n}{z^m+1}\right) = \frac{z_1^n}{mz_1^{m-1}} = -\frac{z_1^{n+1}}{m}.$$

Mit dem Residuensatz gilt also

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{z_1^{n+1}}{m}.$$

Bemerke insbesondere, dass dieses Integral unabhängig von $R$ ist.

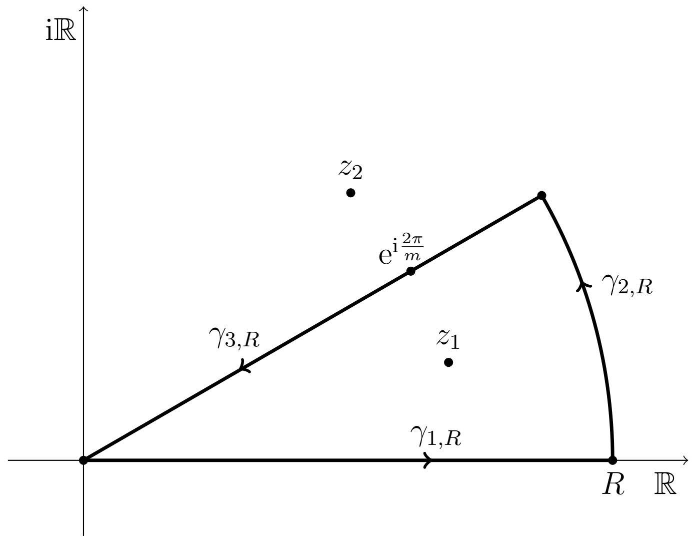


Abbildung 9.2: Der Integrationsweg $\gamma_R$ bestehend aus den Teilen $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$ und $\gamma_{3,R}$.

Wir betrachten das nächste Integral von rechts und sehen

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{1,R}} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z.$$

Für das Integral über den Weg $\gamma_{2,R}$ erhalten wir

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \frac{R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{R^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}+1}\cdot \mathrm{i}R\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \frac{R^{n+1}}{|R^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}+1|}\,\mathrm{d}t.$$

Wir sehen, dass $\left|R^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}+1\right| \ge R^m-1$. Damit haben wir dann

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{2\pi}{m}\cdot\frac{R^{n+1}}{R^m-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

da $m > n+1$.

Als letztes berechnen wir das Integral über den Weg $\gamma_{3,R}$. Bemerke dazu, dass

$$\int_{\gamma_{3,R}} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z = -\int_0^R \frac{\mathrm{e}^{\frac{2n\pi\mathrm{i}}{m}}(R-t)^n}{(R-t)^m+1}\cdot\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{\frac{2(n+1)\pi\mathrm{i}}{m}}\int_0^R \frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x,$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $x = R-t$ benutzt haben. Also folgt

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{3,R}} \frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{\frac{2(n+1)\pi\mathrm{i}}{m}}\int_0^\infty \frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x.$$

Zusammenfassend gilt

$$-2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{z_1^{n+1}}{m} = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\Bigg\{\int_{\gamma_{1,R}}\frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{2,R}}\frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z$$
$$+\int_{\gamma_{3,R}}\frac{z^n}{z^m+1}\,\mathrm{d}z\Bigg\} = \int_0^\infty\frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{\frac{2(n+1)\pi\mathrm{i}}{m}}\int_0^\infty\frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x.$$

Und deswegen

$$\int_0^\infty\frac{x^n}{x^m+1}\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{z_1^{n+1}}{m}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2(n+1)\pi\mathrm{i}}{m}}\right)^{-1} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{m\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi(n+1)}{m}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi(n+1)}{m}}\right)} = \frac{\pi}{m\sin\frac{\pi(n+1)}{m}}.$$

Publiziert am 4.Mai.

Einzureichen am 11./12. Mai.

Letzte Modifikation: 13. Mai 2016