

Lösungen zur Prüfung Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, -1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.	×	
b) Für jede positive ganze Zahl n besitzt jeder n -dimensionale Vektorraum Unterräume der Dimensionen $1, 2, \dots, n$.	×	
c) Es gibt ein Polynom zweiten Grades, dessen Graph durch die Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, -2)$ und $(3, 0)$ geht.		×
d) Im Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ sind die Vektoren $\left\{ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x^2, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x \right\}$ orthogonale Einheitsvektoren.	×	
e) Es gibt eine Matrix A mit charakteristischem Polynom $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$, welche invertierbar ist.		×
f) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrizen A und B . Dann ist v auch ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrix $A + B$.		×
Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrizen A und B . Dann ist v auch ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 für die Matrix AB .		×
g) Eine Matrix A mit $A^5 = 0$ ist singulär.	×	
h) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.		×
i) Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\{v_1, v_2\}$ im \mathbb{R}^3 . Dann sind auch die Vektoren $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ linear unabhängig.	×	
Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\{v_1, v_2\}$ im \mathbb{R}^3 . Dann sind auch die Vektoren $\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$ linear unabhängig.		×
j) Die Menge der 5×5 -Matrizen A , welche $\dim(\text{im}(A)) = \dim(\ker(A))$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.		×
Die Menge der 6×6 -Matrizen A , welche $\dim(\text{im}(A)) = \dim(\ker(A))$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.		×

Siehe nächstes Blatt!

2. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) [7 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Bedingungen

$$y_2(0) = 0, \quad y_3(t) \rightarrow 2 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

a) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 5 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 5 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda+3)(\lambda-6) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte lauten also $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 6$, die algebraischen Vielfachheiten sind alle 1.

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 12 & -24 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_3$ ist frei, $x_2 = 2x_3, x_1 = 2x_2 - 5x_3 = -x_3$.

Mit der Wahl $x_3 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_3$ ist frei, $x_2 = \frac{1}{2}x_3, x_1 = -4x_2 + x_3 = -x_3$.

Mit der Wahl $x_3 = 2$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bitte wenden!

$\lambda_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 5 \\ 1 & -5 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -5 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_3$ ist frei, $x_2 = 0$, $x_1 = 5x_2 + x_3 = x_3$.

Mit der Wahl $x_3 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

b) Wir betrachten zuerst die 2. Anfangsbedingung. Wegen

$$y_3(t) = C_1 + 2C_2 e^{-3t} + C_3 e^{6t}$$

und $e^{-3t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und $e^{6t} \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ schliessen wir aus $y_3(t) \rightarrow 2$ für $t \rightarrow \infty$, dass $C_3 = 0$ und $C_1 = 2$ gelten muss. Die Bedingung $0 = y_2(0) = 2C_1 + C_2 = 4 + C_2$ impliziert weiter $C_2 = -4$.

Die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen lautet somit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

3. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -1 + \alpha & -1 - \alpha \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 + 4\alpha & 5 + \alpha \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

- a) **[6 Punkte]** Berechnen Sie den Kern und das Bild von A in Abhängigkeit von α . Geben Sie auch die jeweiligen Dimensionen an.
- b) **[1 Punkt]** Für welche Werte von α ist A invertierbar?
- c) **[3 Punkte]** Lösen Sie Teilaufgabe a) für die Matrix A^{10} !

a) ker(A):

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha & -1 + \alpha & -1 - \alpha \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 + 4\alpha & 5 + \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 + \alpha & -1 + \alpha & -1 - \alpha \\ -3 & -1 + 4\alpha & 5 + \alpha \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 - 2\alpha & 0 \\ 0 & 8 + 4\alpha & 2 + \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 - 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow (2 + \alpha)x_3 = 0, (4 + 2\alpha)x_2 = 0, x_1 = -3x_2 + x_3.$$

Für $\alpha \neq -2$ erhalten wir $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, also $\ker(A) = \{0\}$ und $\dim(\ker(A)) = 0$.

Für $\alpha = -2$ sind x_2 und x_3 frei und $x_1 = -3x_2 + x_3$. Damit gilt

$$\ker(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\dim(\ker(A)) = 2$.

im(A):

Das Bild wird von den Spalten von A erzeugt. Aus der Formel

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\text{im}(A)) = 3$$

lassen sich die beiden obigen Fälle einfach behandeln.

Für $\alpha \neq -2$ gilt $\dim(\text{im}(A)) = 3$, also $\text{im}(A) = \mathbb{R}^3$.

Für $\alpha = -2$ gilt $\dim(\text{im}(A)) = 1$, das Bild wird also von einem Vektor erzeugt, wir wählen zum Beispiel die erste Spalte von A . Wir erhalten

$$\text{im}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

- b) In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass A vollen Rang hat genau dann wenn $\alpha \neq -2$. In diesem Fall ist A auch invertierbar.
- c) Für $\alpha \neq -2$ ist A invertierbar und damit auch A^{10} , das sieht man beispielsweise mit

$$\det(A^{10}) = (\det(A))^{10} \neq 0.$$

Wir erhalten in diesem Fall also $\ker(A^{10}) = \{0\}$ und $\dim(\ker(A)) = 0$, respektive $\operatorname{im}(A) = \mathbb{R}^3$ und $\dim(\operatorname{im}(A^{10})) = 3$.

Für $\alpha = -2$ nutzen wir zuerst aus, dass $\ker(A) \subset \ker(A^{10})$, da für $v \in \ker(A)$ gilt, dass

$$A^{10}v = A^9(Av) = A^9 \cdot 0 = 0.$$

Weiter gilt $Aw = 5w$, für alle $w \in \operatorname{im}(A)$, also auch $A^{10}w = 5^{10}w$ und damit auch $w \in \operatorname{im}(A^{10})$.
Wiederum mit

$$\dim(\ker(A^{10})) + \dim(\operatorname{im}(A^{10})) = 3$$

folgt, dass wir keine weiteren linear unabhängigen Vektoren in $\ker(A^{10})$ und $\operatorname{im}(A^{10})$ finden können. Es gilt also ebenfalls

$$\ker(A^{10}) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\dim(\ker(A^{10})) = 2$, sowie

$$\operatorname{im}(A^{10}) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

und $\dim(\operatorname{im}(A^{10})) = 1$.

4. Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Sei weiter

$$F : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad p(x) \mapsto (x^2 - 3)p''(x) + p'(x) - 3p(0)$$

eine lineare Abbildung.

- a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis \mathcal{B} .
- b) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von F .
- c) **[4 Punkte]** Berechnen Sie $F^n(p(x))$ für $p(x) = 2 + 7x + x^2$ und $n \geq 1$.

a) Wir rechnen

$$\begin{aligned} F(1) &= -3, \\ F(x) &= 1, \\ F(x^2) &= 2x + (x^2 - 3) \cdot 2 = -6 + 2x + 2x^2. \end{aligned}$$

Das ergibt die Darstellungsmatrix

$$A := [F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Die Eigenwerte von A können wir direkt von der Diagonalen ablesen, da A eine Dreiecksmatrix ist. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$, die algebraischen Vielfachheiten sind alle 1.

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1$ ist frei, $x_3 = 0, x_2 = 6x_3 = 0$.

Mit der Wahl $x_1 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $[p_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von A , dieser entspricht

dem Polynom $p_1(x) = 1$. Diesen Eigenvektor kann man auch direkt aus Teilaufgabe a) ablesen.

$\lambda_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2$ ist frei, $x_3 = 0, x_1 = \frac{x_2 - 6x_3}{3} = \frac{x_2}{3}$.

Bitte wenden!

Mit der Wahl $x_2 = 3$ erhalten wir den Eigenvektor $[p_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ von A , dieser entspricht dem Polynom $p_2(x) = 1 + 3x$.

$\lambda_3 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_3$ ist frei, $x_2 = x_3, x_1 = \frac{x_2 - 6x_3}{5} = -x_3$.

Mit der Wahl $x_3 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor $[p_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von A , dieser entspricht dem Polynom $p_3(x) = -1 + x + x^2$.

c) Wir berechnen die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich der Eigenbasis $\mathcal{S} = \{p_1, p_2, p_3\}$:

$$2 + 7x + x^2 \stackrel{!}{=} ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = a + b - c + (3b + c)x + cx^2.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir somit der Reihe nach

$$c = 1, 3b + c = 7 \Rightarrow b = 2, a + b - c = 2 \Rightarrow a = 1.$$

Somit gilt

$$[p]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } D := [F]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$[F^n(p(x))]_{\mathcal{S}} = D^n[p]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} (-3)^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix},$$

was in koordinatenfreier Form $F^n(p(x)) = (-3)^n - 2^n + 2^n x + 2^n x^2$ entspricht.

5. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) **[3 Punkte]** Überprüfen Sie, dass durch $\langle x, y \rangle_A := x^\top A y$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 definiert ist.
- b) **[3 Punkte]** Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $\{a^{(1)}, a^{(2)}\}$ eine orthonormale Basis $\{b^{(1)}, b^{(2)}\}$ bezüglich des Skalarproduktes aus a).
- c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Vektoren w , welche orthogonal zu v sind bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.
- d) **[2 Punkte]** Sei $\{c^{(1)}, c^{(2)}\}$ eine bezüglich des Standardskalarproduktes von \mathbb{R}^2 orthonormale Eigenbasis von A . Überprüfen Sie, dass dann auch $\langle c^{(1)}, c^{(2)} \rangle_A = 0$ gilt.

a) Linearität im ersten Faktor:

$$\begin{aligned} \langle x_1 + x_2, y \rangle_A &= (x_1 + x_2)^\top A y = x_1^\top A y + x_2^\top A y = \langle x_1, y \rangle_A + \langle x_2, y \rangle_A, \\ \langle \lambda x, y \rangle_A &= (\lambda x)^\top A y = \lambda x^\top A y = \lambda \langle x, y \rangle_A. \end{aligned}$$

Symmetrie:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_A &= x^\top A y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_1 - 2y_2 \\ -2y_1 + 5y_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 = 2y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 5y_2x_2 = y^\top A x \\ &= \langle y, x \rangle_A. \end{aligned}$$

Positive Definitheit (Weg 1):

Eine quadratische Form $x^\top A x$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A strikt grösser als Null sind. Es gilt

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind also 1 und 6; damit ist $\langle x, y \rangle_A$ ein Skalarprodukt.

Positive Definitheit (Weg 2):

Wir wenden das Hurwitz-Kriterium an: $a_{11} = 2 > 0$ und $\det(A) = 10 - 4 = 6 > 0$, somit ist A positiv definit.

b) Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|_A$ die zum Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ gehörige Norm.

Berechnung von $b^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\|a^{(1)}\|_A^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \\ \Rightarrow b^{(1)} &= \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Berechnung von $b^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle_A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \\ \Rightarrow c^{(2)} &= a^{(2)} - \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle_A b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \|c^{(2)}\|_A^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \\ \Rightarrow b^{(2)} &= \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|_A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren liefert somit die folgende orthonormale Basis:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Wir suchen alle w mit $\langle v, w \rangle_A = 0$, also

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 2w_1 + 4w_2,$$

es muss also $w_1 = -2w_2$ gelten. Somit sind alle Vektoren

$$\left\{ w \in \mathbb{R}^2 \mid w = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

orthogonal zu v bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

d) Sei $c^{(1)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und $c^{(2)}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 . Eine kurze Rechnung liefert dann

$$\langle c^{(1)}, c^{(2)} \rangle_A = (c^{(1)})^\top A c^{(2)} = (c^{(1)})^\top \lambda_2 c^{(2)} = \lambda_2 (c^{(1)})^\top c^{(2)} = \lambda_2 \langle c^{(1)}, c^{(2)} \rangle = 0.$$