Serie 1

1. Entscheiden Sie bei den folgenden neun Abbildungen, ob diese linear sind oder nicht.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 0)^\top$

i) ✓ f ist linear

ii) ✗ f ist nicht linear

Lösung

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei reellen Vektorräumen V und W heisst linear, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Für eine Abbildung der Form

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ v \mapsto A \cdot v,$$

wobei A eine $m \times n$-Matrix ist, sind diese Eigenschaften erfüllt. Diese erste Abbildung und die dritte, vierte und fünfte Abbildung sind von dieser Form für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ (0),\ (1).$$

Daher sind diese Abbildungen linear.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

i) ✗ f ist linear

ii) ✓ f ist nicht linear

Lösung

Jede lineare Abbildung muss Null auf Null abbilden. Also $f(0_V) = 0_W$ für ein Abbildung $f\colon V \to W$ (V, W seien Vektorräume und $0_V, 0_W$ die jeweiligen Nullvektoren). Denn Linearität (Siehe Erklärung zur ersten Abbildung) bedingt u.a. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ und, nach subtraktion von $f(0)$, ergibt dies $f(0) = 0$. Für die vorliegende Abbildung (und die sechste und achte Abbildung) ist dies nicht erfüllt. Wir rechnen nach: $f(0) = (0, 0, 1)^\top \neq 0 = (0, 0, 0)^\top$; die Abbildung ist also nicht linear.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

i) ✓ f ist linear

ii) ✗ f ist nicht linear

Lösung

Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

i) ✓ f ist linear

ii) ✗ f ist nicht linear

Lösung
Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität

i) ✓ f ist linear

ii) ✗ f ist nicht linear

Lösung
Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

i) ✗ f ist linear

ii) ✓ f ist nicht linear

Lösung
Falsch: $f(0) = 1 \neq 0$; siehe Erklärung zur zweiten Abbildung.

g) $f : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$

i) ✓ f ist linear

ii) ✗ f ist nicht linear

Lösung
Die Linearität folgt aus den Ableitungsregeln: Es gilt $(g + h)'' = g'' + h''$ und $(\alpha h)'' = \alpha h''$ für alle g, $h \in C^2(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

i) ✗ f ist linear

ii) ✓ f ist nicht linear

Lösung
Falsch: $f(0) = (-1, 1)^\top \neq 0$; siehe Erklärung zur zweiten Abbildung.

i) $f : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x, y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen sin und cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.

i) ✓ f ist linear

ii) ✗ f ist nicht linear

Lösung
Das Bild von $(x, y)^\top$ unter dieser Abbildung ist gleich $\alpha \cdot \sin + \beta \cdot \cos$, wobei (α, β) die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha \sin(-1) + \beta \cos(-1) &= x \\ \alpha \sin(1) + \beta \cos(1) &= y \end{aligned}$$

ist. Dieses hat die eindeutige Lösung

$$\alpha = \frac{y - x}{2 \cdot \sin 1},\ \beta = \frac{x + y}{2 \cdot \cos 1}.$$

Somit ist f durch

$$(x,y)^\top \longmapsto \frac{y-x}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{x+y}{2\cdot\cos 1}\cos$$

gegeben und es gilt

$$\begin{aligned}
f\big((x,y)^\top + (x',y')^\top\big) &= f\big((x+x', y+y')^\top\big)\\
&= \frac{(y+y')-(x+x')}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{(x+x')+(y+y')}{2\cdot\cos 1}\cos\\
&= \frac{y-x}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{x+y}{2\cdot\cos 1}\cos + \frac{y'-x'}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{x'+y'}{2\cdot\cos 1}\cos\\
&= f\big((x,y)^\top\big) + f\big((x',y')^\top\big)
\end{aligned}$$

sowie für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f\big(\alpha(x,y)^\top\big) &= f\big((\alpha x, \alpha y)^\top\big)\\
&= \frac{\alpha y-\alpha x}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{\alpha x+\alpha y}{2\cdot\cos 1}\cos = \alpha\left(\frac{y-x}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{x+y}{2\cdot\cos 1}\cos\right)\\
&= \alpha f\big((x,y)^\top\big).
\end{aligned}$$

Somit ist f linear.

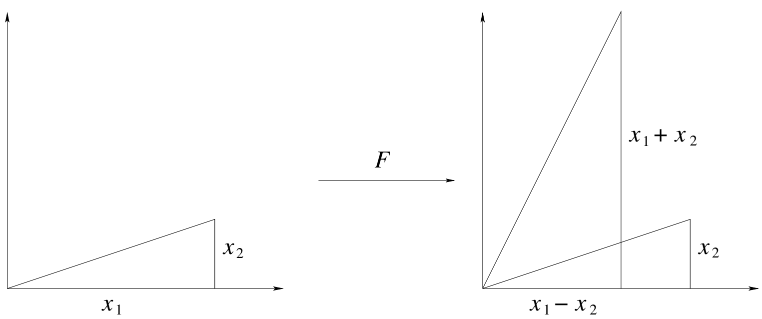
2. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^2$ in sich:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad x' = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch.

Lösung

Es handelt sich um eine Drehstreckung:



Das sehen wir, indem wir für $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ und $x' := \mathcal{F}(x) = (x_1 - x_2, x_1 +$

$x_2)^\top$ die Länge $\|x'\|$ von x' und den Winkel φ zwischen x und x' berechnen:

$$\begin{aligned}
\|x'\| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1+x_2)^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_1^2+x_2^2-2x_1x_2} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2} = \sqrt{2}\,\|x\| \;\Rightarrow\; \text{Streckung um } \sqrt{2}. \\
\cos\varphi &= \frac{(x',x)}{\|x'\|\,\|x\|} \overset{\|x'\|=\sqrt{2}\,\|x\|}{=} \frac{(x_1-x_2)x_1+(x_1+x_2)x_2}{\sqrt{2}\,\|x\|^2} \\
&= \frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{2}\,\|x\|^2} = \frac{\|x\|^2}{\sqrt{2}\,\|x\|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ Drehung um $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (um den Ursprung in der positiven Richtung).

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

Lösung

Die Spalten von A sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren $e^{(1)} = (1,0)^\top$ und $e^{(2)} = (0,1)^\top$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{(1)}\right) &= \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =: a^{(1)}, \\
\mathcal{F}\left(e^{(2)}\right) &= \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} =: a^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = (a^{(1)}, a^{(2)}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Gegeben sei der 4-dimensionale Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der Polynome vom Grad ≤ 3. Zeigen Sie, dass die ersten vier Tschebyscheff-Polynome zweiter Art

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2-1,\ U_3(x) = 8x^3-4x$$

eine Basis von $\mathcal{P}_3$ bilden.

Lösung

In einem Vektorraum V der Dimension n gilt, dass n linear unabhängige Vektoren eine Basis bilden (siehe Nipp/Stoffer, Seite 87, Satz 4.3 (iii).) Da $\mathcal{P}_3$ 4-dimensional ist, ist also zu zeigen:

$$\text{Aus } \lambda_0U_0(x)+\lambda_1U_1(x)+\lambda_2U_2(x)+\lambda_3U_3(x) = 0 \text{ folgt } \lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

<u>1. Möglichkeit</u>: Als Basis in $\mathcal{P}_3$ wählen wir die Standardbasis 1, x, x^2, x^3 . Bezüglich dieser Basis haben $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ die folgenden Koordinatenvektoren:

$$U_0(x) : \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad U_1(x) : \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad U_2(x) : \begin{pmatrix}-1\\0\\4\\0\end{pmatrix}, \qquad U_3(x) : \begin{pmatrix}0\\-4\\0\\8\end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, weil die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

gleich $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$, also $\neq 0$ ist.

<u>2. Möglichkeit</u>: Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 U_0(x) + \lambda_1 U_1(x) + \lambda_2 U_2(x) + \lambda_3 U_3(x) \\ &= \lambda_0\, 1 + \lambda_1\, 2x + \lambda_2\, (4x^2 - 1) + \lambda_3\, (8x^3 - 4x) \\ &= (\lambda_0 - \lambda_2)\, 1 + (2\lambda_1 - 4\lambda_3)\, x + 4\lambda_2\, x^2 + 8\lambda_3\, x^3. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgen die Gleichungen

$$\lambda_0 - \lambda_2 = 0,\ 2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0,\ 4\lambda_2 = 0,\ 8\lambda_3 = 0,$$

welche umgeschrieben werden können als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A\lambda = 0. \tag{1}$$

Es gilt $\det A = 64 \neq 0$, deshalb hat (1) nur die triviale Lösung $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Somit sind $U_0(x)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ linear unabhängig und bilden also eine Basis.

4. Die Vektoren $a = (1, -2, 5, -3)^\top$, $b = (2, 3, 1, -4)^\top$ und $c = (3, 8, -3, -5)^\top$ erzeugen einen Unterraum W von $\mathbb{R}^4$.

a) Bestimmen Sie $\dim W$ und eine Basis von W.

Lösung

Wir wenden das Gaussverfahren auf die Matrix mit den Zeilen a, b und c an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beim Gaussverfahren wird der von den Zeilen erzeugte Unterraum nicht verändert. Deshalb ist $\dim W = 2$ und

$$\{(1, -2, 5, -3)^\top,\ (0, 7, -9, 2)^\top\}$$

eine Basis von W.

b) Vervollständigen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Lösung

Eine mögliche Vervollständigung dieser Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ist

$$\{(1,-2,5,-3)^\top,\ (0,7,-9,2)^\top,\ (0,0,1,0)^\top,\ (0,0,0,1)^\top\}.$$

Dies ist eine Basis, weil die Matrix A mit diesen Zeilen in Zeilenstufenform ist mit $\det A = 7 \neq 0$.

c) Geben Sie ein homogenes LGS an, welches W als Lösungsraum hat.

Lösung

Die lineare Gleichung $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ hat die Basisvektoren $(1,-2,5,-3)^\top$, $(0,7,-9,2)^\top$ von W als Lösung für $(x_1,x_2,x_3,x_4)^\top$, falls $(u_1,u_2,u_3,u_4)^\top$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Durch Rückwärtseinsetzen sehen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{9}{7}u_3 - \frac{2}{7}u_4, \\ u_1 &= 2u_2 - 5u_3 + 3u_4 = -\frac{17}{7}u_3 + \frac{17}{7}u_4 \end{aligned}$$

gilt, wobei u_3 und u_4 frei gewählt werden können. Wir wählen $(u_3,u_4) = (7,0)$ und $(u_3,u_4) = (1,1)$ und sehen, dass das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -17x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

die Basisvektoren $(1,-2,5,-3)^\top$, $(0,7,-9,2)^\top$ von W als Lösung hat. Die Koeffizientenmatrix dieses LGS ist in Zeilenstufenform und hat Rang 2. Daher hat der Lösungsgraum dieses LGS die Dimension $4-2=2$. Da die obigen Basisvektoren von W im Lösungsraum liegen, ist dieser gleich W.