Serie 3

1. a) Die Norm $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = |x| + |y|$ wird von einem Skalarprodukt induziert.

i) ✗ richtig
ii) ✓ falsch

Lösung
Diese Norm erfüllt die Parallelogrammregel nicht und wird daher nicht von einem Skalarprodukt induziert (vgl. Aufgabe 4a) dieser Serie). In der Tat haben wir für $v = (1,0)^\top$ und $w = (0,1)^\top$

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \|(1,1)^\top\|^2 + \|(1,-1)^\top\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \\ 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) &= 2(1^2 + 1^2) = 4, \end{aligned}$$

also

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 \neq 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

b) $\langle a, b \rangle := ab$ ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

i) ✓ richtig
ii) ✗ falsch

Lösung
$\langle a, b \rangle := ab$ erfüllt die Eigenschaften eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}$:

i. linear im ersten Faktor:
   (i) $\langle a_1 + a_2, b \rangle = (a_1 + a_2)b = a_1 b + a_2 b = \langle a_1, b \rangle + \langle a_2, b \rangle$
   (ii) $\langle \alpha a, b \rangle = (\alpha a)b = \alpha(ab) = \alpha \langle a, b \rangle$
ii. symmetrisch: $\langle a, b \rangle = ab = ba = \langle b, a \rangle$
iii. positiv definit: $\langle a, a \rangle = a^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und aus $\langle a, a \rangle = a^2 = 0$ folgt $a = 0$.

c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

i) ✓ richtig
ii) ✗ falsch

Lösung
Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|x\|_\infty^2 = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}^2 = \max\{x_1^2, \ldots, x_n^2\} \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|_2^2$$

und

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2\sum_{i<j} |x_i| \cdot |x_j| \geq x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|_2^2.$$

Daher gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

d) Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1,1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

i) ✓ richtig

ii) ✗ falsch

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}\|f_n\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_n(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(nx)^2} = \frac{1}{n} \arctan(nx)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{n} \cdot (\arctan n - \arctan(-n)) = \frac{2}{n} \arctan n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.\end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge von Funktionen $f_n(x)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1}$ gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$.

e) Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1,1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

i) ✗ richtig

ii) ✓ falsch

Lösung

Nach Definition der Maximumsnorm auf $C^0([-1,1])$ haben wir

$$\|f_n\|_\infty = \max\{|f_n(x)| : -1 \leq x \leq 1\} = \max\left\{\frac{1}{1+(nx)^2} : -1 \leq x \leq 1\right\} = 1.$$

Somit konvergiert die Folge von Fuktionen $f_n(x)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ nicht gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$.

f) Der Betrag $|\cdot|$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

i) ✓ richtig

ii) ✗ falsch

Lösung

Der Betrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ erfüllt die Eigenschaften einer Norm:

i. Es gilt $|a| \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und aus $|a| = 0$ folgt $a = 0$.

ii. Für alle $a, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $|\alpha a| = |\alpha| \cdot |a|$.

iii. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt die Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$.

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \operatorname{diag}(2, \frac{1}{3})$. Wir definieren $(x,y) := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

a) Zeigen Sie, dass (x,y) in V ein Skalarprodukt definiert.

Lösung

Zuerst bemerken wir, dass $D = \operatorname{diag}(2, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$(x,y) := x^\top D y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \frac{1}{3} y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + \frac{1}{3} x_2 y_2.$$

Wir kontrollieren die Eigenschaften (S1)-(S3) von einem Skalarprodukt (siehe Buch, Seite 92).

(S1) i) Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$:

$$(x, y+z) = x^\top D(y+z) = x^\top Dy + x^\top Dz = (x,y)+(x,z), \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}^2.$$

ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(x, \alpha y) = x^\top D(\alpha y) = \alpha x^\top Dy = \alpha(x,y).$$

(x, y) ist also linear im zweiten Faktor.

(S2) (x, y) ist symmetrisch, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(x,y) = x^\top Dy \overset{x^\top Dy \in \mathbb{R}}{=} (x^\top Dy)^\top = y^\top D^\top x = y^\top Dx = (y,x).$$

Bemerkung: Für D nicht symmetrisch ist $(x,y) = x^\top Dy$ nicht mehr symmetrisch, also kein Skalarprodukt.

(S3) (x, y) ist positiv definit, denn:

$$(x,x) = 2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$(x,x) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, \text{ also } x = 0.$$

(x, y) ist also ein Skalarprodukt in V.

b) Wie sieht die durch (x, y) induzierte Norm $\|x\|$ aus?

Lösung

Die durch (x, y) induzierte Norm ist

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x^\top Dx} = \sqrt{2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2}.$$

c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung

$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}3^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$

3. Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und α_n, $\beta_m > 0$ im Vektorraum $V = C^0([0, 2\pi])$, den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

ausstatten.

a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene Funktionen aus dieser Menge orthogonal sind.

Lösung
Wir müssen die Orthogonalitätsrelationen $\langle f_m, f_n \rangle = 0$, $\langle g_m, g_n \rangle = 0$ für $m \neq n$ sowie $\langle f_n, g_m \rangle = 0$ zeigen. Wir benutzen dafür die trigonometrischen Identitäten aus dem Hinweis und rechnen zuerst die drei Relationen für $m \neq n$ nach:

$$\begin{aligned}
\langle f_m, f_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_m \cos(mx)\big) \cdot \big(\alpha_n \cos(nx)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n \left(\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x)\, dx + \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x)\, dx \right) \\
&\overset{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n \left(\frac{1}{m-n} \sin((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{m+n} \sin((m+n)x)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n (0 - 0 + 0 - 0) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle g_m, g_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\beta_m \sin(mx)\big) \cdot \big(\beta_n \sin(nx)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\beta_m\beta_n \left(\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x)\, dx - \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x)\, dx \right) \\
&\overset{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\beta_m\beta_n \left(\frac{1}{m-n} \sin((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{m+n} \sin((m+n)x)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\beta_m\beta_n (0 - 0 - 0 + 0) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f_n, g_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n \cos(nx)\big) \cdot \big(\beta_m \sin(mx)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m \left(\int_0^{2\pi} \sin((m-n)x)\, dx + \int_0^{2\pi} \sin((m+n)x)\, dx \right) \\
&\overset{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m \left(-\frac{1}{m-n} \cos((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{m+n} \cos((m+n)x)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m \left(-\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+n} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Es bleibt die dritte Relation für $m = n \geq 1$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\langle f_n, g_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n \cos(nx)\big) \cdot \big(\beta_n \sin(nx)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n \left(\int_0^{2\pi} \sin(0)\, dx + \int_0^{2\pi} \sin(2nx)\, dx \right) \\
&\overset{n\geq 1}{=} \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n \left(0 - \frac{1}{2n}\cos(2nx)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) = 0.
\end{aligned}$$

b) Wie sind α_n und β_m zu wählen, damit alle Funktionen aus dieser Menge die Norm 1 haben?
Hinweis: Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned}
\sin u \, \sin v &= \frac{1}{2}\left(\cos(u - v) - \cos(u + v)\right) \\
\cos u \, \cos v &= \frac{1}{2}\left(\cos(u - v) + \cos(u + v)\right) \\
\sin u \, \cos v &= \frac{1}{2}\left(\sin(u - v) + \sin(u + v)\right)
\end{aligned}$$

Lösung
Für n, $m \geq 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\langle f_n, f_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n \cos(nx)\big) \cdot \big(\alpha_n \cos(nx)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos(0)\, dx + \int_0^{2\pi} \cos(2nx)\, dx \right) \\
&\overset{n\geq 1}{=} \frac{1}{2}\alpha_n^2 \left(2\pi + \frac{1}{2n}\sin(2nx)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_n^2 (2\pi + 0 - 0) = \alpha_n^2\, \pi, \\
\langle g_m, g_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\beta_m \sin(mx)\big) \cdot \big(\beta_m \sin(mx)\big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\beta_m^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos(0)\, dx - \int_0^{2\pi} \cos(2mx)\, dx \right) \\
&\overset{m\geq 1}{=} \frac{1}{2}\beta_m^2 \left(2\pi - \frac{1}{2m}\sin(2mx)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\beta_m^2 (2\pi - 0 + 0) = \beta_m^2\, \pi
\end{aligned}$$

und für $n = 0$

$$\langle f_0, f_0 \rangle = \int_0^{2\pi} (\alpha_0 \cdot 1)(\alpha_0 \cdot 1)\, dx = \alpha_0^2 \cdot (2\pi).$$

Die Funktionen f_n und g_m haben genau dann Norm 1, wenn $\langle f_n, f_n \rangle = 1$ und $\langle g_m, g_m \rangle = 1$ gilt. Somit muss $\alpha_n^2 \pi = 1$ für $n \geq 1$ und $\beta_m^2 \pi = 1$ für $m \geq 1$ sowie $2\alpha_0^2 \pi = 1$ gelten. Also muss gelten:

$$\alpha_n = \beta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \forall\, n,\, m \geq 1 \text{ und}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4. a) Sei $\|\cdot\|$ eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm. Man rechne nach, dass dann die Parallelogrammregel gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Lösung
Wir nehmen an, dass $\|\cdot\|$ vom Skalarprodukt $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ induziert ist. Wir rechnen die Parallelogrammregel unter Ausnutzung der Bilinearität und Symmetrie nach:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&\quad + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).
\end{aligned}$$

b) Man verifiziere, dass die Maximumsnorm

$$\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

auf $C^0([a,b])$ die Axiome einer Norm erfüllt.
Lösung

- (i) Für jede Funktion $f \in C^0([a,b])$ gilt

  $$\|f\|_{L^\infty} = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} \geq 0.$$

  (ii) Aus $\|f\|_{L^\infty} = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} = 0$ folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, also $f \equiv 0$.
- Für jede Funktion $f \in C^0([a,b])$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

  $$\begin{aligned}
  \|\alpha f\|_{L^\infty} &= \max\{|\alpha \cdot f(x)| : a \leq x \leq b\} = \max\{|\alpha| \cdot |f(x)| : a \leq x \leq b\} \\
  &= |\alpha| \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} = |\alpha|\, \|f\|_{L^\infty}.
  \end{aligned}$$

- Für alle Funktionen $f, g \in C^0([a,b])$ gilt

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^\infty} &= \max\{|f(x)+g(x)| : a \le x \le b\} \\ &\le \max\{|f(x)|+|g(x)| : a \le x \le b\} \\ &\le \max\{|f(x)| : a \le x \le b\} + \max\{|g(x)| : a \le x \le b\} \\ &= \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

c) Auf dem Vektorraum der Polynome definiert

$$\langle P,\, Q\rangle := \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt. Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.

Lösung

Wir machen den Ansatz

$$P_2(x) = x^2 + ax + b$$

für ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht. Die Relationen $\langle P_2, P_0\rangle = 0$ und $\langle P_2, P_1\rangle = 0$ liefern zwei lineare Gleichungen für die Koeffizienten a und b:

$$\begin{aligned} 0 = \langle P_2, P_0\rangle &= \int_0^1 (x^2+ax+b)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + bx\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b, \\ 0 = \langle P_2, P_1\rangle &= \int_0^1 (x^3+ax^2+bx)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3a + 6b &= -2 \\ 4a + 6b &= -3, \end{aligned}$$

welches wir mit dem Gaussverfahren lösen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}\right]$$

Also ist die eindeutige Lösung durch $a = -1$ und $b = \frac{1}{6}$ gegeben und

$$P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

ist ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.