

Serie 4

1. a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^2 ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- i) ✓ richtig
ii) ✗ falsch

Lösung

Die Orthogonalprojektion von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf $w = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist gegeben durch

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w = \frac{15}{45} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

- i) ✓ richtig
ii) ✗ falsch

Lösung

Sei

$$A = (a^{(1)} \quad \dots \quad a^{(n)})$$

eine Matrix, wobei $a^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ der j -te Spaltenvektor bezeichnet. Dann ist

$$A^T A = \begin{pmatrix} a^{(1)\top} \\ \vdots \\ a^{(n)\top} \end{pmatrix} \cdot (a^{(1)} \quad \dots \quad a^{(n)}) = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}, a^{(1)} \rangle & \dots & \langle a^{(1)}, a^{(n)} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a^{(n)}, a^{(1)} \rangle & \dots & \langle a^{(n)}, a^{(n)} \rangle \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^n . Die Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn $A^T A = I$ ist. Aus der Berechnung oben folgt, dass dies zu der Aussage in der Aufgabenstellung äquivalent ist.

- c) Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$.

- i) ✗ richtig
ii) ✓ falsch

Lösung

Die Aussage stimmt zum Beispiel für die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = -x$ nicht. Deren Graphen schneiden sich senkrecht im Ursprung, aber es gilt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b (-x^2) dx = \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} < 0,$$

also sind f und g nicht orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- d) Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.
- i) ✓ richtig
 - ii) ✗ falsch

Lösung

Eine ungerade Funktion f erfüllt die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ und eine gerade Funktion g die Eigenschaft $g(-x) = g(x)$. Somit liefert die Substitution $y = -x$ die folgende Beziehung für das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \int_1^{-1} f(-y)g(-y) (-dy) = \int_{-1}^1 f(-y)g(-y) dy \\ &= \int_{-1}^1 (-f(y))g(y) dy = - \int_{-1}^1 f(y)g(y) dy = -\langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\langle f, g \rangle = 0$, die ungerade Funktion f und die gerade Funktion g sind also orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- e) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.
- i) ✗ richtig
 - ii) ✓ falsch

Lösung

Für zwei Einheitsvektoren v und w besagt die Schwarzsche Ungleichung (Satz 4.5 im Buch von Nipp/Stoffer)

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle = 1 \cdot 1 = 1.$$

Daraus folgt $\langle v, w \rangle \leq 1$, das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren kann also nicht beliebig gross sein.

- f) In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.
- i) ✗ richtig
 - ii) ✓ falsch

Lösung

Man beachte, dass paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt automatisch linear unabhängig sind (Satz 4.6 im Buch von Nipp/Stoffer). Somit kann es in einem Vektorraum der Dimension n höchstens n paarweise orthogonale Einheitsvektoren geben.

2. Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$. Benützen Sie das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^3 .

Lösung

Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^3 . Es induziert die euklidische Norm $\| \cdot \|_2$ auf \mathbb{R}^3 .

Berechnung von $b^{(1)}$: $b^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$

Berechnung von $b^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow c^{(2)} &= a^{(2)} - \langle a^{(2)}, b^{(1)} \rangle b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow b^{(2)} &= \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Berechnung von $b^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \langle a^{(3)}, b^{(1)} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle a^{(3)}, b^{(2)} \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \Rightarrow c^{(3)} &= a^{(3)} - \langle a^{(3)}, b^{(1)} \rangle b^{(1)} - \langle a^{(3)}, b^{(2)} \rangle b^{(2)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow b^{(3)} &= \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$, d.h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

Lösung

Man kann natürlich die Matrix $B = (b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)})$ definieren und $Bx = v$ nach x mit Gauss lösen. Weil $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ eine orthonormale Basis bildet, wissen wir aber aus der Vorlesung, dass sich v als

$$v = \langle v, b^{(1)} \rangle b^{(1)} + \langle v, b^{(2)} \rangle b^{(2)} + \langle v, b^{(3)} \rangle b^{(3)}$$

schreiben lässt. Es gilt also für die Koordinaten x_1, x_2, x_3 :

$$x_1 = \langle v, b^{(1)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

$$x_2 = \langle v, b^{(2)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{14}{\sqrt{6}} = \sqrt{6},$$

$$x_3 = \langle v, b^{(3)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}.$$

Bemerkung: Das ist genau das Gleiche wie das Lösen von $Bx = v$ durch $x = B^\top v$ (die Spalten von B sind orthonormiert, also ist B orthogonal und es gilt $B^{-1} = B^\top$).

Die Beziehung $x_i = \langle v, b^{(i)} \rangle$ für $i = 1, 2, 3$ lässt sich auch sehr leicht direkt aus dem Ansatz herleiten:

$$\begin{aligned} \langle v, b^{(i)} \rangle &= \langle x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}, b^{(i)} \rangle \\ &= x_1 \langle b^{(1)}, b^{(i)} \rangle + x_2 \langle b^{(2)}, b^{(i)} \rangle + x_3 \langle b^{(3)}, b^{(i)} \rangle \\ &= x_i, \end{aligned}$$

da $(b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)})$ eine orthonormale Basis ist.

3. Gegeben seien die drei Vektoren $p^{(1)} = x^2, p^{(2)} = x, p^{(3)} = 1$ in \mathcal{P}_2 . Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ eine orthonormale Basis $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}$ (respektieren Sie die Reihenfolge!). Benützen Sie als Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx, \text{ für } f, g \in \mathcal{P}_2.$$

Lösung

Berechnung von $q^{(1)}$:

$$\|p^{(1)}\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 x^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 x^4 dx} = \sqrt{\frac{1}{5}x^5 \Big|_{-1}^1} = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\text{also } q^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{\|p^{(1)}\|} = \sqrt{\frac{5}{2}}x^2.$$

Berechnung von $q^{(2)}$:

$$\begin{aligned} c^{(2)} &= p^{(2)} - \underbrace{\langle p^{(2)}, q^{(1)} \rangle}_{=0} q^{(1)} = x - \int_{-1}^1 \underbrace{\sqrt{\frac{5}{2}}u^3 du}_{=0} \sqrt{\frac{5}{2}}x^2 = x \\ \Rightarrow q^{(2)} &= \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \text{ denn } \|c^{(2)}\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^1} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Berechnung von $q^{(3)}$:

$$\begin{aligned} c^{(3)} &= p^{(3)} - \langle p^{(3)}, q^{(1)} \rangle q^{(1)} - \langle p^{(3)}, q^{(2)} \rangle q^{(2)} \\ &= 1 - \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{5}{2}}u^2 du}_{=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}} \sqrt{\frac{5}{2}}x^2 - \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}}u du}_{=0} \sqrt{\frac{3}{2}}x = 1 - \frac{5}{3}x^2 \\ \Rightarrow q^{(3)} &= \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|} = -\frac{5}{\sqrt{8}}x^2 + \frac{3}{\sqrt{8}}, \text{ denn } \|c^{(3)}\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(1 - \frac{5}{3}x^2\right)^2 dx} \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{9}x^5\right) \Big|_{x=-1}^1} = \sqrt{\frac{8}{9}}. \end{aligned}$$

In dieser Reihenfolge erhält man also NICHT Vielfache von den Legendre-Polynomen (siehe S.97 im Buch von Nipp/Stoffer für die Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren auf $1, x, x^2, x^3$).

4. a) Gegeben seien die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und $\alpha_n, \beta_m > 0$, im Vektorraum $C^0([0, 2\pi])$. Man berechne für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion der Funktion

$$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \pi$$

auf den von $\{f_0, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k\}$ aufgespannten Unterraum, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$. Die Aufgabe darf mit MATLAB gelöst werden.

Lösung

Wir bezeichnen mit p_k die Orthogonalprojektion von ϕ auf den von $\{f_0, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k\}$ aufgespannten Unterraum von $C^0([0, 2\pi])$. Nach Aufgabe 3 der Serie 3

sind $\{f_0, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k\}$ paarweise orthogonale Einheitsvektoren von $C^0([0, 2\pi])$. Daher gilt nach der Formel aus der Vorlesung für die Orthogonalprojektion

$$p_k = \sum_{n=0}^k \langle \phi, f_n \rangle f_n + \sum_{m=1}^k \langle \phi, g_m \rangle g_m.$$

Wir müssen also die Skalarprodukte $\langle \phi, f_n \rangle$ für $n = 0, \dots, k$ und $\langle \phi, g_m \rangle$ für $m = 1, \dots, k$ ausrechnen. Für $n = 0$ bekommen wir

$$\langle \phi, f_0 \rangle = \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x^2}{2} - \pi x \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi^2 - 2\pi^2}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

Für $n = 1, \dots, k$ und $m = 1, \dots, k$ benutzen wir partielle Integration:

$$\begin{aligned} \langle \phi, f_n \rangle &= \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \, dx \\ &= (x - \pi) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} n} \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} n} \sin nx \, dx \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{\sqrt{\pi} n^2} \cos nx \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi} n^2} (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi, g_m \rangle &= \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \, dx \\ &= (x - \pi) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi} m} \cos mx \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi} m} \cos mx \right) dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi} m} (\pi - (-\pi)) + \frac{1}{\sqrt{\pi} m^2} \sin mx \Big|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{2\sqrt{\pi}}{m} + 0 - 0 = -\frac{2\sqrt{\pi}}{m}. \end{aligned}$$

Somit ist die Orthogonalprojektion nach der obigen Formel durch

$$p_k(x) = \sum_{m=1}^k -\frac{2\sqrt{\pi}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx = -\sum_{m=1}^k \frac{2}{m} \sin mx$$

gegeben.

- b) Man stelle mit Hilfe von MATLAB die Funktion ϕ , sowie die gefundenen Projektionen für einige Werte von k als Graphen im selben Koordinatensystem dar.
Bemerkung: Die gefundenen Projektionen heißen Fourier-Polynome der Funktion ϕ . Für $k \rightarrow \infty$ erhält man die sogenannte Fourier-Reihe von ϕ .

Lösung

Der folgende Code löst die gesamte Aufgabe 4 mit MATLAB. Siehe die MATLAB Dokumentation für Erklärungen u.a. zu den Befehlen `quad` und `@`

```

% Bestimmung der Koeffizienten a(n)=⟨phi,f_n⟩
F = @(x)(x-pi)./sqrt(2*pi);
a0 = quad(F,0,2*pi);
a = [];
for n = 1:30
    F = @(x)(x-pi)./sqrt(pi).*cos(n*x);
    a = [a, quad(F,0,2*pi)];
end
b = [];
% Bestimmung der Koeffizienten b(m)=⟨phi,g_m⟩
for m = 1:30
    F = @(x)(x-pi)./sqrt(pi).*sin(m*x);
    b = [b, quad(F,0,2*pi)];
end

% Plotten von phi, p_1, p_5 und p_30
x=0:pi/1000:2*pi;
phi = x-pi;
p1 = a0/sqrt(2*pi)+a(1)/sqrt(pi)*cos(x)+b(1)/sqrt(pi)*sin(x);
p5 = a0/sqrt(2*pi);
for n=1:5
    p5 = p5 + a(n)/sqrt(pi)*cos(n*x) + b(n)/sqrt(pi)*sin(n*x);
end
p30 = a0/sqrt(2*pi);
for n = 1:30
    p30 = p30 + a(n)/sqrt(pi)*cos(n*x) + b(n)/sqrt(pi)*sin(n*x);
end
plot(x,phi,x,p1,x,p5,x,p30)
axis([0,2*pi,-4,4])
legend('phi','k=1','k=5','k=30','Location','NorthWest')
% Export in ps-File: print -dpsc a4_4ab.ps

```

Darstellung von ϕ und der gefundenen Projektionen p_k für $k = 1$, $k = 5$ und $k = 30$ als Graphen:

