Serie 6

1. a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so, dass $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

i) ✓ $\dim(\operatorname{Bild} A) = n$
ii) ✗ $\dim(\operatorname{Bild} A) = 1$
iii) ✓ $\dim(\operatorname{Kern} A) = 0$
iv) ✗ $\dim(\operatorname{Kern} A) = 1$

Lösung
Der Kern von A ist genau die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$. Da $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat, gilt darum $\dim(\operatorname{Kern} A) = 0$. Weiter gilt nach der in der Vorlesung behandelten Dimensionsformel

$$\dim(\operatorname{Kern} A) + \dim(\operatorname{Bild} A) = n.$$

Daher gilt $\dim(\operatorname{Bild} A) = n$.

b) Das Bild von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch die lineare Hülle der Vektoren ...

i) ✗ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) ✗ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

iii) ✗ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

iv) ✗ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

v) ✓ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Lösung
Wir bringen die gegebene Matrix A mit dem Gaussverfahren in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher hat das Bild von A die Dimension 2 und die beiden ersten Spalten $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von Bild A.

Somit ist die fünfte Antwort richtig und alle Vektoren im Bild von A sind von der Form

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind nicht von dieser Form (λ_1 müsste für beide Vektoren gleich 1 sein und es gibt kein passendes λ_2). Sie liegen daher nicht im Bild von A und die erste und vierte Antwort sind falsch.

Die zweite und dritte Antwort sind auch falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^4$ nicht im Bild von A liegen.

c) Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

i) ✓ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) ✗ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

iii) ✗ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

iv) ✗ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

v) ✗ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Lösung

Oben haben wir die gegebene Matrix A mit dem Gaussverfahren in die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht. Daher sind die Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ durch

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 - 2x_4 \\ x_1 &= \frac{1}{2}((x_3 + 2x_4) + x_3 - 2x_4) = x_3 \end{aligned}$$

gegeben, wobei x_3 und x_4 freie Parameter sind. Der Kern von A hat somit die Dimension 2.

Die Vektoren $(1, -1, 1, 0)^\top, (1, -3, 1, 1)^\top$ sind Lösungen von $Ax = 0$ und linear unabhängig, da der zweite kein Vielfaches vom ersten ist. Sie bilden daher eine Basis vom Kern von A.

Die zweite Antwort ist falsch, weil jede Basis vom Kern von A zwei Elemente hat.

Die dritte und fünfte Antwort sind falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nicht im Kern von A liegen.

Die vierte Antwort ist falsch, weil $(1, 0, -1, 0)^\top$ keine Lösung von $Ax = 0$ ist.

d) Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

i) ✗ $(\frac{1}{2}, 0)$
ii) ✗ $(-1, -1)$
iii) ✗ $(0, -2)$
iv) ✓ $(2, 0)$
v) ✗ $(1, 1)$

Lösung

Da der gegebene Vektor v bezüglich der Basis B die Koordinaten $(-1, -1)$ hat, gilt

$$v = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher sind $(2, 0)$ die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis.

e) Seien A und B Darstellungsmatrizen einer Funktion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\det A = \det B$.

i) ✓ richtig
ii) ✗ falsch

Lösung

A und B sind ähnlich, d.h. $B = TAT^{-1}$ für eine reguläre Matrix T (nämlich die Übergangsmatrix). Daher gilt $\det B = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A (\det T)^{-1} = \det A$.

2. Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3.

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

Lösung

Die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ ist durch

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben, weil deren Spalten aus den Koordinatenvektoren der neuen Basisvektoren bezüglich der Standardbasis bestehen. Die gesuchte Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ist invers zu S. Wir invertieren darum S mit dem Gaussverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Somit gilt

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

Lösung

Nach der Formel aus der Vorlesung gilt $B = TAT^{-1} = TAS$. Somit bekommen wir

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

Lösung

Wir bezeichnen die Basisvektoren aus $\mathcal{B}'$ mit b_1', b_2' und b_3'. Nach Aufgabenteil b) wird b_1' auf $-b_1'$ und b_2' auf $-b_2'$, sowie b_3' auf 0 abgebildet. Somit handelt es sich um die Projektion entlang b_3' auf die Ebene, die durch b_1' und b_2' aufgespannt wird, gefolgt von einer Punktspiegelung am Nullpunkt.

Bemerkung: Weil b_3' senkrecht auf b_1' und b_2' steht, ist die obige Projektion entlang b_3' die Orthogonalprojektion auf die Ebene, die durch b_1' und b_2' aufgespannt wird (bezüglich des Standardskalarprodukts).

3. Gegeben seien zwei lineare Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$ mit

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

Entscheiden Sie mit Hilfe der *Fredholm-Alternative*, ob die beiden Gleichungssysteme jeweils eine Lösung besitzen.

Lösung

Die Fredholm-Alternative besagt: *Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar,*

wenn b senkrecht auf allen Lösungen des adjungierten Gleichungssystems $A^\top y = 0$ steht.

Da das Standardskalarprodukt linear in beiden Argumenten ist, ist dies genau dann erfüllt, wenn b senkrecht auf den Vektoren einer Basis des Lösungsraums von $A^\top y = 0$ steht.

Wir bestimmen daher eine Basis des Lösungsraums von $A^\top y = 0$ mit dem Gaussverfahren:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Die Lösungen erfüllen also $y_2 = 2y_3$ und $y_1 = -2y_2 + y_3 - y_4 = -3y_3 - y_4$, wobei y_3 und y_4 freie Parameter sind. Eine mögliche Basis des Lösungsraums ist damit gegeben durch die Vektoren

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit finden wir:

- $Ax = b_1$ hat eine Lösung, da $\langle b_1,\, c^{(1)}\rangle = \langle b_1,\, c^{(2)}\rangle = 0$.
- $Ax = b_2$ hat keine Lösung, da $\langle b_2,\, c^{(1)}\rangle = -2 \neq 0$.

4. *(Darstellung eines vierdimensionalen Würfels)* Sei $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x_i \leq 1\}$ der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten die Projektionen $P_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ entlang von $(1, 1, 1, -2)^\top$ auf den Unterraum mit $x_4 = 0$ und $P_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ entlang von $(2, 1, -4, 0)^\top$ auf den Unterraum mit $x_3 = 0$, sowie die Abbildung

$$E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto (x_1, x_2)^\top.$$

a) Man bestimme die Darstellungsmatrizen von P_1, P_2 und E.

Lösung

Wir bezeichnen die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ mit e_1, e_2, e_3 und e_4.

- Da e_1, e_2 und e_3 im Unterraum mit $x_4 = 0$ liegen, gilt $P_1(e_1) = e_1$, $P_1(e_2) = e_2$ und $P_1(e_3) = e_3$. Weiter haben wir

$$P_1(e_4) = e_4 + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn bei einer Projektion wird ein Punkt/Vektor (hier e_4) soweit entlang der Projektionsrichtung (hier $(1, 1, 1, -2)^\top$) verschoben, bis er im Unterraum (hier $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$) liegt, auf welchen projiziert wird. Konkret liefert dies in unserem Fall das Gleichungssystem

$$e_4 + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die 4. Komponente liefert also $\lambda = \frac{1}{2}$.
Somit ist die Darstellungsmatrix von P_1 (bezüglich der Standardbasis) durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Da e_1, e_2 und e_4 im Unterraum mit $x_3 = 0$ liegen, gilt $P_2(e_1) = e_1$, $P_2(e_2) = e_2$ und $P_2(e_4) = e_4$. Weiter haben wir

$$P_2(e_3) = e_3 + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Somit ist die Darstellungsmatrix von P_2 (bezüglich der Standardbasis) durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  gegeben.

- Es gilt $E(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sowie $E(e_3) = E(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  die Darstellungsmatrix von E, bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^4$ resp. $\mathbb{R}^2$.

b) Man bestimme die Darstellungsmatrizen der zusammengesetzten Abbildungen $P_2 \circ P_1$ und $\phi := E \circ P_2 \circ P_1$.

Lösung

- Die Darstellungsmatrix von $P_2 \circ P_1$ ist das Produkt der Darstellungsmatrizen von P_2 und P_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Die Darstellungsmatrix von ϕ ist das Produkt der Darstellungsmatrizen von E und $P_2 \circ P_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

c) Man skizziere das Bild der Kanten von W unter ϕ.

Lösung

Für die Darstellung der Kanten des vierdimensionalen Würfels berechnen wir die

Bilder der 16 Ecken $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ mit $x_i \in \{0,1\}$ unter ϕ:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\phi\big((0,0,0,0)^\top\big) &=& (0,0)^\top & \quad & \phi\big((0,0,0,1)^\top\big) &=& \big(\frac{3}{4},\frac{5}{8}\big)^\top \\
\phi\big((1,0,0,0)^\top\big) &=& (1,0)^\top & & \phi\big((1,0,0,1)^\top\big) &=& \big(\frac{7}{4},\frac{5}{8}\big)^\top \\
\phi\big((0,1,0,0)^\top\big) &=& (0,1)^\top & & \phi\big((0,1,0,1)^\top\big) &=& \big(\frac{3}{4},\frac{13}{8}\big)^\top \\
\phi\big((1,1,0,0)^\top\big) &=& (1,1)^\top & & \phi\big((1,1,0,1)^\top\big) &=& \big(\frac{7}{4},\frac{13}{8}\big)^\top \\
\phi\big((0,0,1,0)^\top\big) &=& \big(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\big)^\top & & \phi\big((0,0,1,1)^\top\big) &=& \big(\frac{5}{4},\frac{7}{8}\big)^\top \\
\phi\big((1,0,1,0)^\top\big) &=& \big(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\big)^\top & & \phi\big((1,0,1,1)^\top\big) &=& \big(\frac{9}{4},\frac{7}{8}\big)^\top \\
\phi\big((0,1,1,0)^\top\big) &=& \big(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\big)^\top & & \phi\big((0,1,1,1)^\top\big) &=& \big(\frac{5}{4},\frac{15}{8}\big)^\top \\
\phi\big((1,1,1,0)^\top\big) &=& \big(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\big)^\top & & \phi\big((1,1,1,1)^\top\big) &=& \big(\frac{9}{4},\frac{15}{8}\big)^\top
\end{array}$$

(Linearität ausnutzen! z.B. sind die Werte $5-8$ der ersten Spalte gleich den ersten 4 Werten verschoben/addiert um $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})^\top$). Die Kanten verbinden die Ecken, die sich nur in einer der vier Koordinaten unterscheiden. Dies ergibt folgendes Bild: