ETH Zürich - D-MAVT
Prof. Norbert Hungerbühler Lineare Algebra II

Serie 8

1. a) $x^2 + xy + 3y^2$ ist eine quadratische Form.

i) ✓ richtig

ii) ✗ falsch

Lösung
Eine allgemeine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ ist von der Form

$$q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (x, y)^\top A(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

für eine symmetrische, reelle Matrix $A = (a_{ij})$. Die Abbildung $(x, y) \mapsto x^2 + xy + 3y^2$ ist von dieser Form für $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

b) $x^2 + y$ ist eine quadratische Form.

i) ✗ richtig

ii) ✓ falsch

Lösung
Die Abbildung $(x, y) \mapsto x^2 + y$ ist nicht von der Form aus der vorherigen Antwort. Somit ist sie keine quadratische Form.

c) $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.

i) ✓ richtig

ii) ✗ falsch

Lösung
Es gilt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)\right)^2 = 2x_1x_2.$$

Daher wird $2x_1x_2$ durch die Transformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2), y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$. Diese Transformation ist von der Form $y = Tx$ für die orthogonale Matrix $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (die Spalten bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$). Daher handelt es sich um eine Hauptachsentransformation.

d) $2x_1x_2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar.

i) ✓ richtig

ii) ✗ falsch

Lösung
Nach der Hauptachsentransformation bei der vorherigen Aussage ist dieser Kegelschnitt durch $y_1^2 - y_2^2 = 1$ gegeben. Es handelt sich also tatsächlich um eine Hyperbel (mit den Asymptoten $y_1 = \pm y_2$).

e) $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.

i) ✗ richtig

ii) ✓ falsch

Lösung
Wir haben bei der dritten Aussage gesehen, dass $2x_1x_2$ nach Hauptachsentransformation zu $y_1^2 - y_2^2$ wird. Diese quadratische Form nimmt daher sowohl positive wie auch negative Werte an. Sie ist also indefinit und insbesondere nicht positiv definit.

2. Gegeben sind die quadratischen Formen im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2, \\ q(x) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3. \end{aligned}$$

a) Man schreibe die Formen in der Gestalt $x^\top Ax$ mit symmetrischer Matrix A.

Lösung
Für Q: Es gilt

$$Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_1 = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = x^\top Ax$$

für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Für q: Es gilt

$$q(x) = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_1 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3x_1 + \frac{1}{2}x_3x_2 = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = x^\top Ax$$

für $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b) Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und führe die Hauptachsentransformation durch.

Lösung
Für Q: Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A mit Entwicklung der Determinante nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 1) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 1.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_3.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

also gilt $E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A. Da die oben gefundenen Basisvektoren von E_3 und E_1 bereits senkrecht aufeinander stehen, brauchen wir sie nur zu normieren:

$$\begin{aligned} t^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ t^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ t^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt $T^\top A T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$Q(x) = x^\top A x = y^\top T^\top A T y = 3y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2.$$

<u>Für q</u>: Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A mit Entwicklung der Determi-

nante nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_3) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda\left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{2}\right) \\
&= -\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) \\
&= -\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\right) = -\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2(\lambda-1) \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 1.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von $E_{-\frac{1}{2}}$.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also gilt $E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A. Da E_1 und $E_{-\frac{1}{2}}$ senkrecht aufeinander stehen (wegen der Symmetrie von A), finden wir $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ durch Anwendung von Gram-Schmidt auf die obige Basis von $E_{-\frac{1}{2}}$ und $t^{(3)}$ durch Normierung des obigen Basisvektors

von E_1:

$$t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$t'^{(2)} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},$$

$$t^{(2)} = \frac{t'^{(2)}}{\|t'^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$t^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Somit gilt $T^\top AT = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. Die Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$q(x) = x^\top Ax = y^\top T^\top ATy = -\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2.$$

c) Sind Q und q positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit?

Lösung

Für Q: Die Rechnung bei b) hat gezeigt, dass A nur positive Eigenwerte hat. Somit ist Q positiv definit.

Für q: Die Rechnung bei b) hat gezeigt, dass A sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat. Somit ist q indefinit.

d) Sei $q_B(x) = x^\top Bx$ für eine nicht symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man bestimme eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $q_B(x) = q_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung

Es gilt $q_B(x) = x^\top Bx = (x^\top Bx)^\top = x^\top B^\top x$; denn $q_B(x)$ ist immer eine reelle Zahl (oder eine 1×1-Matrix wenn Sie so wollen) und beim transponieren passiert nichts. Damit erhalten wir $q_B(x) = \frac{1}{2}(x^\top Bx + x^\top B^\top x) = x^\top(\frac{1}{2}(B + B^\top))x$. Somit $A = \frac{1}{2}(B + B^\top) = A^\top$.

3. Man bestimme durch Hauptachsentransformation und Translation die Normalform der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6(x_1 + x_2 + x_3) + 9 = 0\}.$$

Wie lautet die zugehörige Koordinatentransformation?

Lösung
Die Quadrik Q ist gegeben durch $x^\top Ax + a^\top x + 9 = 0$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ a = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + 1 \cdot (\lambda - 3) + 2(2\lambda - 6) \\ &= (\lambda - 3)\big((2-\lambda)(\lambda + 2) + 1 + 4\big) \\ &= (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 9) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = -3$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_3.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 \end{array}\right) \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Also gilt $E_{-3} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A. Da E_3 und E_{-3} senkrecht aufeinander stehen (wegen der Symmetrie von A), finden wir $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ durch Anwendung von Gram-Schmidt auf die obige Basis von E_3 und $t^{(3)}$ durch Normierung des obigen Basisvektors von E_{-3}:

$$\begin{aligned}
t^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
t'^{(2)} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
t^{(2)} &= \frac{t'^{(2)}}{\|t'^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
t^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Somit gilt $T^\top AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Die Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$\begin{aligned}
x^\top Ax + a^\top x + 9 &= y^\top T^\top ATy + (-6, -6, -6)Ty + 9 \\
&= 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - 6\sqrt{3}y_2 + 9.
\end{aligned}$$

Schliesslich bringen wir die linearen Terme zum Verschwinden durch quadratisches Ergänzen:

$$\begin{aligned}
3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - 6\sqrt{3}y_2 + 9 &= 3y_1^2 + 3(y_2 - \sqrt{3})^2 - 9 - 3y_3^2 + 9 \\
&= 3y_1^2 + 3(y_2 - \sqrt{3})^2 - 3y_3^2.
\end{aligned}$$

Nach der Translation $z = y + c$ für $c = (0, -\sqrt{3}, 0)^\top$ ist somit Q durch die Normalform

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$$

gegeben. Es handelt sich somit um einen geraden (Doppel)kegel mit der z_3-Achse als Achse und Mittelpunkt im Ursprung des z-Systems.

Die zugehörige Koordinatentransformation lautet $z = y + c = T^\top x + c$, also

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2), \\
z_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) - \sqrt{3}, \\
z_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_1 - x_2 + 2x_3).
\end{aligned}$$

4. Man finde die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \ (x,y) \mapsto -12x + 5x^3 - 12y + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3$$

und bestimme, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima oder Sattelpunkte handelt.

Hinweis: Man wende das Hurwitz-Kriterium auf die Hessesche Matrix an.

Lösung

Die kritischen Punkte von f sind durch $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ gegeben, erfüllen also die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -12 + 15x^2 + 6xy + 3y^2 \overset{!}{=} 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -12 + 3x^2 + 6xy + 15y^2 \overset{!}{=} 0.$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung liefert

$$12x^2 - 12y^2 = 0,$$

also

$$(x-y)(x+y) = 0.$$

Die kritischen Punkte erfüllen somit $x = y$ oder $x = -y$.

Im Fall $x = y$ lauten die beiden obigen Gleichungen $24x^2 - 12 = 0$, bzw. äquivalent dazu $x^2 = \frac{1}{2}$, sie haben also die Lösungen

$$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Im Fall $x = -y$ lauten die beiden obigen Gleichungen $12x^2 - 12 = 0$, bzw. äquivalent dazu $x^2 = 1$, sie haben also die Lösungen

$$x = -y = \pm 1.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(1,-1)$, $(-1,1)$.

Weiteres Ableiten liefert die Einträge der Hesseschen Matrix:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 30x + 6y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x + 6y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x + 30y.$$

Im kritischen Punkt $p_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ lautet die Hessesche Matrix somit

$$H_f(p_1) = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det H_f(p_1) = 2 \cdot 18^2 - 2 \cdot 6^2 > 0$ und $(H_f(p_1))_{11} > 0$. Nach dem Hurwitz-Kriterium ist $H_f(p_1)$ also positiv definit und f besitzt in p_1 ein lokales Minimum.

Im kritischen Punkt $p_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_2) = \begin{pmatrix} -18\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -18\sqrt{2} \end{pmatrix} = -H_f(p_1).$$

Da $H_f(p_1)$ positiv definit ist und $H_f(p_2) = -H_f(p_1)$ gilt, ist $H_f(p_2)$ negativ definit und f besitzt in p_2 ein lokales Maximum.

Im kritischen Punkt $p_3 = (1, -1)$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_3) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Sie hat also den positiven Eigenwert 24 und den negativen Eigenwert -24 und ist indefinit. Der kritische Punkt p_3 ist daher ein Sattelpunkt von f.

Im kritischen Punkt $p_4 = (-1, 1)$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_4) = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Sie hat also wiederum den positiven Eigenwert 24 und den negativen Eigenwert -24 und ist indefinit. Der kritische Punkt p_4 ist daher auch ein Sattelpunkt von f.