

## Serie 10

1. a) Wahr oder falsch: Im Lösungspunkt einer linearen Ausgleichsaufgabe  $Ax - c = r$  steht der Residuenvektor  $r$  senkrecht auf dem Bildraum von  $A$ .
- i) ✓ Wahr.
  - ii) ✗ Falsch.

### Lösung

Löst  $x$  die Normalgleichungen  $A^\top Ax = A^\top c$ , so folgt  $A^\top r = A^\top (Ax - c) = 0$ , d.h.  $r$  steht senkrecht auf den Spalten von  $A$  und somit senkrecht auf dem ganzen Bildraum von  $A$ .

- b) Wahr oder falsch: Eine lineare Ausgleichsaufgabe hat immer genau eine Lösung; sie minimiert den Fehlervektor.
- i) ✗ Wahr.
  - ii) ✓ Falsch.

### Lösung

Die Lösung des Ausgleichsproblems  $Ax - c = r$  mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist eindeutig genau dann, wenn  $\text{Rang}(A) = n$ . Dennoch, da der minimale Residuenvektor eindeutig ist, gilt für zwei Lösungen  $x^{(1)}, x^{(2)}$  eines Ausgleichsproblems natürlich:  $Ax^{(1)} - c = r = Ax^{(2)} - c$ , also  $Ax^{(1)} = Ax^{(2)}$ .

- c) Wahr oder falsch: Falls der Messvektor  $c$  einer linearen Ausgleichsaufgabe  $Ax - c = r$  im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix  $A$  liegt, so ist der minimale Residuenvektor  $r$  gleich dem Nullvektor.
- i) ✓ Wahr.
  - ii) ✗ Falsch.

### Lösung

Ja, denn  $Ax - c = 0$  (oder  $Ax = c$ ) ist lösbar genau dann, wenn  $c$  im Spaltenraum von  $A$  liegt. Das Gleichungssystem ist also im "klassischen" Sinne lösbar und die Ausgleichsrechnung überflüssig (dennoch besteht keine Gefahr die Methode der Ausgleichsrechnung zu benutzen, sie liefert dieselben ("klassischen") Lösungen), mit minimalem Residuenvektor  $r = 0$ .

- d) Bei einem Modellbaumotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl  $X$  (in  $1000 \frac{\text{U}}{\text{min}}$ ) und der Leistung  $Y$  (in kW) untersucht. Es ergab sich das folgende Messprotokoll:

- 1. Messung:  $X_1 = 1; Y_1 = 1$
- 2. Messung:  $X_2 = 2; Y_2 = 2$
- 3. Messung:  $X_3 = 4; Y_3 = 3$ .

Bestimmen Sie die zugehörige Ausgleichsgerade  $y = ax + b$ : Die Fehlergleichungen hierfür lauten

$$aX_i + b - Y_i = r_i$$

für  $i = 1, 2, 3$ .

- i) ✗  $a = \frac{3}{11}; b = \frac{1}{2}$ .
- ii) ✗  $a = \frac{3}{4}; b = \frac{3}{5}$ .
- iii) ✗  $a = \frac{3}{5}; b = \frac{9}{14}$ .
- iv) ✓  $a = \frac{9}{14}; b = \frac{1}{2}$ .

**Lösung**

Die Fehlergleichungen lauten

$$\begin{aligned} a + b - 1 &= r_1 \\ 2a + b - 2 &= r_2 \\ 4a + b - 3 &= r_3, \end{aligned}$$

also ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Wir müssen die Normalgleichungen  $A^T A x = A^T c$  lösen. Mit  $A^T A = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$  und  $A^T c = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$  ist dies  $\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$ , und die Lösungen sind  $a = \frac{9}{14}, b = \frac{1}{2}$ .

e) Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 &= r_1 \\ x_2 - 3 &= r_2 \\ x_2 - 4 &= r_3. \end{aligned}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form  $Ax - c = r$ , bestimmen Sie die QR-Zerlegung  $A = QR$  mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor  $d = Q^T c$ , und bestimmen Sie schliesslich die Lösung  $x \in \mathbb{R}^2$  des Ausgleichsproblems.

- i) ✓  $x = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ .
- ii) ✗  $x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .
- iii) ✗  $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- iv) ✗  $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

**Lösung**

Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  wählen wir die Givens-Rotation  $Q^T = U_{23}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

mit  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Wir erhalten  $Q^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$ . Mit

$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  wird  $d = Q^T c = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ . Schliesslich löst man  $R_0 x = d_0$  durch Rück-

wärt einsetzen und erhält  $x = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Dabei sind  $R_0$  und  $d_0$  die ersten zwei Zeilen von  $R$  und  $d$ .