Serie 1

1. Entscheiden Sie bei den folgenden neun Abbildungen, ob diese linear sind oder nicht.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 0)^\top$
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

g) $f : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

i) $f : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x, y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen sin und cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.
   i) f ist linear
   ii) f ist nicht linear

2. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^2$ in sich:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \xmapsto{\mathcal{F}} \quad x' = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

3. Gegeben sei der 4-dimensionale Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der Polynome vom Grad ≤ 3. Zeigen Sie, dass die ersten vier Tschebyscheff-Polynome zweiter Art

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1,\ U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

eine Basis von $\mathcal{P}_3$ bilden.

4. Die Vektoren $a = (1, -2, 5, -3)^\top$, $b = (2, 3, 1, -4)^\top$ und $c = (3, 8, -3, -5)^\top$ erzeugen einen Unterraum W von $\mathbb{R}^4$.

a) Bestimmen Sie $\dim W$ und eine Basis von W.

b) Vervollständigen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Geben Sie ein homogenes LGS an, welches W als Lösungsraum hat.