Serie 2

1. a) Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

i) $(1, -2, 1)^\top$.
ii) $(0, 1, 1)^\top$.
iii) $(-2, 1, 1)^\top$.
iv) $(0, 3, 2)^\top$.
v) $(1, 1, 1)^\top$.

b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

i) -1.
ii) 1.
iii) i.
iv) $-i$.
v) $1 - i$.

c) Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}2} & e^{-\frac{2\pi i}{3}3} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}2} & e^{-\frac{2\pi i}{3}4} & e^{-\frac{2\pi i}{3}6} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}3} & e^{-\frac{2\pi i}{3}6} & e^{-\frac{2\pi i}{3}9} \end{pmatrix}$$

haben 0 als Eigenwert?

i) A_1.
ii) A_2.
iii) A_3.
iv) A_4.
v) Keine.

2. Lösen Sie das Eigenwertproblem zu den folgenden Matrizen, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, **b)** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Geben Sie in MATLAB die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein.

a) Berechnen Sie mit MATLAB die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.
Hinweis: `[V,D] = eig(A)` gibt die Eigenwerte in der Diagonalen von D und die zugehörigen Eigenvektoren in den Spalten von V zurück.

b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$–Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x folgendes gilt:

i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k $(k \in \mathbb{N})$ und x ein zugehöriger Eigenvektor.

ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

4. Für den skizzierten elektrischen Vierpol gilt zwischen Ein- und Ausgang die Beziehung

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

mit der Kettenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{R_2+R_3}{R_2} & R_3 \\ \frac{R_1+R_2+R_3}{R_1 R_2} & \frac{R_1+R_3}{R_1} \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A. Für welche Werte von $\frac{U_1}{I_1}$ hat man (bei beliebigem $I_1 \neq 0$) Widerstandsanpassung

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1}?$$