ETH Zürich - D-MAVT
Prof. Norbert Hungerbühler — Lineare Algebra II

Serie 3

1. a) Die Norm $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = |x| + |y|$ wird von einem Skalarprodukt induziert.

i) richtig
ii) falsch

b) $\langle a, b\rangle := ab$ ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

i) richtig
ii) falsch

c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

i) richtig
ii) falsch

d) Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1, 1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

i) richtig
ii) falsch

e) Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1, 1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

i) richtig
ii) falsch

f) Der Betrag $|\cdot|$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

i) richtig
ii) falsch

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \operatorname{diag}(2, \frac{1}{3})$. Wir definieren $(x, y) := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

a) Zeigen Sie, dass (x, y) in V ein Skalarprodukt definiert.

b) Wie sieht die durch (x, y) induzierte Norm $\|x\|$ aus?

c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und α_n, $\beta_m > 0$ im Vektorraum $V = C^0([0, 2\pi])$, den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$$

ausstatten.

a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene Funktionen aus dieser Menge orthogonal sind.

b) Wie sind α_n und β_m zu wählen, damit alle Funktionen aus dieser Menge die Norm 1 haben?

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned}
\sin u \, \sin v &= \frac{1}{2} \left(\cos(u-v) - \cos(u+v) \right) \\
\cos u \, \cos v &= \frac{1}{2} \left(\cos(u-v) + \cos(u+v) \right) \\
\sin u \, \cos v &= \frac{1}{2} \left(\sin(u-v) + \sin(u+v) \right)
\end{aligned}$$

4. a) Sei $\|\cdot\|$ eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm. Man rechne nach, dass dann die Parallelogrammregel gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

b) Man verifiziere, dass die Maximumsnorm

$$\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

auf $C^0([a,b])$ die Axiome einer Norm erfüllt.

c) Auf dem Vektorraum der Polynome definiert

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x) Q(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt. Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.