Prof. Norbert Hungerbühler

ETH Zürich - D-MAVT
Lineare Algebra II

Serie 4

1. a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

i) richtig

ii) falsch

b) $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

i) richtig

ii) falsch

c) Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

i) richtig

ii) falsch

d) Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$.

i) richtig

ii) falsch

e) In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

i) richtig

ii) falsch

f) In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

i) richtig

ii) falsch

2. Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$. Benützen Sie das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, d.h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

3. Gegeben seien die drei Vektoren $p^{(1)} = x^2$, $p^{(2)} = x$, $p^{(3)} = 1$ in $\mathcal{P}_2$. Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ eine orthonormale Basis $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ (respektieren Sie die Reihenfolge!). Benützen Sie als Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx, \text{ für } f, g \in \mathcal{P}_2.$$

4. a) Gegeben seien die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und α_n, $\beta_m > 0$, im Vektorraum $C^0([0, 2\pi])$. Man berechne für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion der Funktion

$$\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \pi$$

auf den von $\{f_0, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k\}$ aufgespannten Unterraum, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$. Die Aufgabe darf mit MATLAB gelöst werden.

b) Man stelle mit Hilfe von MATLAB die Funktion ϕ, sowie die gefundenen Projektionen für einige Werte von k als Graphen im selben Koordinatensystem dar.
Bemerkung: Die gefundenen Projektionen heissen Fourier-Polynome der Funktion ϕ. Für $k \to \infty$ erhält man die sogenannte Fourier-Reihe von ϕ.