Serie 6

1. a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so, dass $Ax = 0$ <u>nur</u> die triviale Lösung hat. Dann gilt:

i) $\dim(\text{Bild}\, A) = n$

ii) $\dim(\text{Bild}\, A) = 1$

iii) $\dim(\text{Kern}\, A) = 0$

iv) $\dim(\text{Kern}\, A) = 1$

b) Das Bild von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch die lineare Hülle der Vektoren ...

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

v) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

v) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

i) $(\frac{1}{2}, 0)$

ii) $(-1, -1)$

iii) $(0, -2)$

iv) $(2, 0)$

v) $(1, 1)$

e) Seien A und B Darstellungsmatrizen einer Funktion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\det A = \det B$.

i) richtig

ii) falsch

2. Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3.

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

3. Gegeben seien zwei lineare Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Hilfe der *Fredholm-Alternative*, ob die beiden Gleichungssysteme jeweils eine Lösung besitzen.

4. *(Darstellung eines vierdimensionalen Würfels)* Sei $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 : 0 \le x_i \le 1\}$ der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten die Projektionen $P_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ entlang von $(1, 1, 1, -2)^\top$ auf den Unterraum mit $x_4 = 0$ und $P_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ entlang von $(2, 1, -4, 0)^\top$ auf den Unterraum mit $x_3 = 0$, sowie die Abbildung

$$E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto (x_1, x_2)^\top.$$

a) Man bestimme die Darstellungsmatrizen von P_1, P_2 und E.

b) Man bestimme die Darstellungsmatrizen der zusammengesetzten Abbildungen $P_2 \circ P_1$ und $\phi := E \circ P_2 \circ P_1$.

c) Man skizziere das Bild der Kanten von W unter ϕ.