

Serie 7

1. Sei \mathcal{P}_3 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 . Die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$, $p(x) \mapsto p(x) - p'(x)$ hat die Eigenwerte ...
- 0 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.
 - 0 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.
 - 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.
 - 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

2. a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- b) Bestimmen Sie von Hand eine orthogonale Eigenbasis zu A .
- c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit MATLAB.

3. a) Diagonalisieren Sie – falls möglich – die Matrizen

$$(i) A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (ii) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad (iii) C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Kann man in den Fällen, in denen die Matrizen diagonalisierbar sind, die entsprechenden Transformationsmatrizen T orthogonal wählen? Wenn ja, geben Sie so ein T an.

4. Angeregt durch die berühmte Kaninchenaufgabe von Leonardo von Pisa (1170–1250), genannt Fibonacci, stellen wir die folgende Aufgabe:

Annahme: Neugeborene Kaninchenpaare bringen nach dem ersten und dem zweiten Monat jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt und stellen dann die weitere Fortpflanzung ein.

- a) Man bestimme eine Rekursionsformel für die Anzahl F_n der im Monat n neugeborenen Kaninchenpaare. Man starte mit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

b) Bestimmen Sie das allgemeine Glied F_n nach folgender Anleitung:

1. Setzen Sie $x^{(n)} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$, $n = 0, 1, \dots$. Die Zuordnung $x^{(n)} \mapsto x^{(n+1)}$ ist eine lineare Abbildung. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A .
2. Die Zuordnung $x^{(0)} \mapsto x^{(n)}$ ist auch eine lineare Abbildung. Sie wird beschrieben durch die Abbildungsmatrix A^n . Berechnen Sie den Vektor $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ und geben Sie F_n an.

c) Man bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$