

Serie 8

1. a) $x^2 + xy + 3y^2$ ist eine quadratische Form.
 - i) richtig
 - ii) falsch
 - b) $x^2 + y$ ist eine quadratische Form.
 - i) richtig
 - ii) falsch
 - c) $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.
 - i) richtig
 - ii) falsch
 - d) $2x_1x_2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar.
 - i) richtig
 - ii) falsch
 - e) $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.
 - i) richtig
 - ii) falsch
2. Gegeben sind die quadratischen Formen im \mathbb{R}^3

$$Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2,$$

$$q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3.$$

- a) Man schreibe die Formen in der Gestalt $x^\top Ax$ mit symmetrischer Matrix A .
 - b) Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und führe die Hauptachsentransformation durch.
 - c) Sind Q und q positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit?
 - d) Sei $q_B(x) = x^\top Bx$ für eine nicht symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man bestimme eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $q_B(x) = q_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Man bestimme durch Hauptachsentransformation und Translation die Normalform der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6(x_1 + x_2 + x_3) + 9 = 0\}.$$

Wie lautet die zugehörige Koordinatentransformation?

4. Man finde die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -12x + 5x^3 - 12y + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3$$

und bestimme, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima oder Sattelpunkte handelt.

Hinweis: Man wende das Hurwitz-Kriterium auf die Hessesche Matrix an.