Serie 10

1. a) Wahr oder falsch: Im Lösungspunkt einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax - c = r$ steht der Residuenvektor r senkrecht auf dem Bildraum von A.

i) Wahr.
ii) Falsch.

b) Wahr oder falsch: Eine lineare Ausgleichsaufgabe hat immer genau eine Lösung; sie minimiert den Fehlervektor.

i) Wahr.
ii) Falsch.

c) Wahr oder falsch: Falls der Messvektor c einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax-c = r$ im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix A liegt, so ist der minimale Residuenvektor r gleich dem Nullvektor.

i) Wahr.
ii) Falsch.

d) Bei einem Modellbaumotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl X (in $1000\frac{\text{U}}{\text{min}}$) und der Leistung Y (in kW) untersucht. Es ergab sich das folgende Messprotokoll:

1. Messung: $X_1 = 1;\ Y_1 = 1$
2. Messung: $X_2 = 2;\ Y_2 = 2$
3. Messung: $X_3 = 4;\ Y_3 = 3.$

Bestimmen Sie die zugehörige Ausgleichsgerade $y = ax + b$: Die Fehlergleichungen hierfür lauten

$$aX_i + b - Y_i = r_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

i) $a = \frac{3}{11}; b = \frac{1}{2}$.
ii) $a = \frac{3}{4}; b = \frac{3}{5}$.
iii) $a = \frac{3}{5}; b = \frac{9}{14}$.
iv) $a = \frac{9}{14}; b = \frac{1}{2}$.

e) Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 1 & = & r_1 \\ & & x_2 & - & 3 & = & r_2 \\ & & x_2 & - & 4 & = & r_3. \end{array}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form $Ax - c = r$, bestimmen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor $d = Q^\top c$, und bestimmen Sie schliesslich die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems.

i) $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

ii) $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

iii) $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

iv) $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.