Prof. Norbert Hungerbühler

ETH Zürich - D-MAVT
Lineare Algebra II

Serie 11

1. a) Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = e^{ax}$.

☐ richtig

☐ falsch

b) Sind y_1 und y_2 Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$, so ist auch jede Linearkombination von y_1 und y_2 eine Lösung.

☐ richtig

☐ falsch

c) $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ sind Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 0$.

☐ richtig

☐ falsch

d) $a\sinh(\omega x) + b\cosh(\omega x)$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.

☐ richtig

☐ falsch

e) $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.

☐ richtig

☐ falsch

2. Lösen Sie folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & x_2 & - & 9 & = & r_1 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & 12 & = & r_2 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & - & 15 & = & r_3. \end{array}$$

Um Ihnen aufwändige Rechnungen zu ersparen, geben wir Q an:

$$Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Verifizieren Sie, dass Q orthogonal ist.

b) Geben Sie zuerst A und c an, und bestimmen Sie dann R und $d = Q^\top c$.

c) Lösen Sie das Ausgleichsproblem.

d) Bestimmen Sie die Länge des minimalen Residuenvektors r.

3. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = A\,y$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \to +\infty$.

4. Gegeben sei folgendes Massen-Feder-System in Ruhelage:

Zur Zeit t, ausgelenkt aus der Ruhelage, sieht das System wie folgt aus:

Aus dem Hookeschen Federgesetz

$$\text{Kraft einer Feder} \;=\; \text{Federkonstante} \;\cdot\; \text{Ausdehnung der Feder}$$

und dem Newtonschen Prinzip

$$\text{Masse} \;\cdot\; \text{Beschleunigung} \;=\; \text{Kraft}$$

können wir das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{array}{rcrcl} m_1\,\ddot{y}_1 & = & -f_1\,y_1 & + & f_2\,(y_2 - y_1) \\ m_2\,\ddot{y}_2 & = & -f_2\,(y_2 - y_1) & - & f_3\,y_2 \end{array}$$

herleiten, wobei $f_1,\ f_2,\ f_3$ die Federkonstanten der drei Federn bezeichnen. Wir nehmen an, dass die Federkonstanten mit den Massen wie folgt zusammenhängen: $f_1 = 3m_1,\ f_2 = 2m_1 = m_2,\ f_3 = 3m_2$. Die Bewegung wird also durch das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{array}{rcrcr} \ddot{y}_1 & = & -5y_1 & + & 2y_2 \\ \ddot{y}_2 & = & y_1 & - & 4y_2 \end{array}$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Lösung dieses Systems zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{rclcrcl} y_1(0) & = & 6\,, & \qquad & \dot{y}_1(0) & = & 0\,, \\ y_2(0) & = & 0\,, & \qquad & \dot{y}_2(0) & = & 0\,. \end{array}$$