Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Rückführung auf ein System 1. Ordnung

Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} \qquad (*)$$

wird durch die Substitution

$$\begin{array}{rcl} y_0 & := & y \\ y_1 & := & y' \\ y_2 & := & y'' \\ \vdots & & \\ y_{n-1} & := & y^{(n-1)} \end{array}$$

zu einem homogenen linearen System 1. Ordnung: Da nämlich $y_k' = y_{k+1}$ für $k = 0, \ldots, n-2$ und $y_{n-1}' = y^{(n)} = a_0 y_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_{n-1} y_{n-1}$ hat man

$$(*) \iff \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

- Diese Substitution funktioniert auch bei *nicht konstanten* Koeffizienten $a_i(x)$ und bei *inhomogenen* Gleichungen.
- Auf die gleiche Weise können auch *Systeme* linearer Gleichungen höherer Ordnung in ein System 1. Ordnung verwandelt werden.

Beispiel

Die Gleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' = -\omega^2 y$$

wird durch $y_0 := y$, $y_1 := y'$ zum äquivalenten System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Inhomogene lineare Systeme

Gegeben: Stetige Funktionen

$$\begin{aligned} B &: \;]a,b[\to \mathbb{R}^n \\ A &: \;]a,b[\to \mathbb{R}^{n\times n} \end{aligned}$$

D.h. die Koeffizienten des Vektors B und der Matrix A hängen stetig von x ab.

Gesucht: Die Lösungen $Y :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ des **inhomogenen** Systems

$$Y' = AY + B \tag{I}$$

Für $B \equiv 0$ erhält man das zugehörige **homogene** System

$$Y' = AY \tag{H}$$

Satz

- $\forall x_0 \in]a,b[, \forall C \in \mathbb{R}^n$ gilt: Es existiert eine eindeutige Lösung Y von (I) mit $Y(x_0) = C$.
- $S_H := \{Y : \ Y \text{ löst (H)}\}$ ist ein n-dimensionaler VR.
- Sei ϕ eine beliebige Lösung von (I). Dann gilt: $S_I := \{Y : \ Y \text{ löst (I)}\} = \phi + S_H$. D.h.: *Die allgemeine Lösung von (I) ist eine partikuläre Lösung von (I) plus die allgemeine Lösung von (H).*

Korollar

Sei S_H wie oben und $\phi_i \in S_H$. Dann sind äquivalent:

- $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ ist eine Basis von S_H
- $\forall x \in]a,b[$ gilt: $(\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- $\exists x \in]a,b[$ mit: $(\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Korollar

Ist Y eine komplexe Lösung von (H), so sind $\mathrm{Re}(Y)$ und $\mathrm{Im}(Y)$ reelle Lösungen von (H).

Achtung: Dies gilt nur wenn $A(x)$ eine *reelle* Matrixfunktion ist.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

$\phi_1(x) = e^{-i\omega x}\begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}$, $\phi_2(x) = e^{i\omega x}\begin{pmatrix} -i \\ \omega \end{pmatrix}$ sind Lösungen von

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} Y \qquad (*)$$

$\phi_1(0) = \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}$ und $\phi_2(0) = \begin{pmatrix} -i \\ \omega \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig (für $\omega \neq 0$), also ist (ϕ_1, ϕ_2) eine Basis des Lösungsraums von $(*)$. Dasselbe gilt für den Real- und den Imaginärteil:

$$\mathrm{Re}(\phi_1) = \begin{pmatrix} \sin(\omega x) \\ \omega\cos(\omega x) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Im}(\phi_1) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ -\omega\sin(\omega x) \end{pmatrix}$$

(ϕ_1 und ϕ_2 entstehen aus A einfach durch $e^{\mathrm{EW}x}\mathrm{EV}$ - warum?)

Lineare inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung mit variablen Koeffizienten

Wir betrachten nun eine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} + f \qquad \text{(i)}$$

und die entsprechende homogene Gleichung (mit $f \equiv 0$)

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} \qquad \text{(h)}$$

Die Koeffizienten a_i und f sind stetige Fuktionen auf $]a, b[$, d.h. $a_i = a_i(x)$ und $f = f(x)$. Wir können nun (i) und (h) in je ein System 1. Ordnung verwandeln, und den obigen Satz für solche Systeme anwenden. Man erhält:

Satz

- $\forall x_0 \in]a,b[, \forall c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ gilt: Es existiert eine eindeutige Lösung $y :]a,b[\to \mathbb{R}$ von (i) mit $y(x_0) = c_0, y'(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$.
- $S_h := \{y : \ y \text{ löst (h)}\}$ ist ein n-dimensionaler VR.
- Sei ϕ eine beliebige Lösung von (i). Dann gilt: $S_i := \{y : \ y \text{ löst (i)}\} = \phi + S_h$.
- Sind $\phi_1, \dots, \phi_n \in S_h$, so sind äquivalent:
  (a) $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ ist eine Basis von S_h
  (b) $\forall x \in]a,b[$ ist die **Wronski-Determinante**

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \neq 0$$

  (c) $\exists x \in]a,b[$ so dass $W(x) \neq 0$.
- **Satz von Abel:** $W'(x) = a_{n-1}(x) W(x)$.

Beweis: Satz von Abel

1. Schritt: Ableitung einer Determinante. Hängen die Koeffizienten $a_{ij}(t)$ der Matrix A von t ab, so gilt

$$\frac{d}{dt}\det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ \dots + \det\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & & & \dots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Begründung: Der Beweis erfolgt wie bei der Produktregel:

$$\frac{d}{dt}\left(f_1(t)f_2(t)\cdots f_n(t)\right) =$$

$$= f_1'(t)f_2(t)\cdots f_n(t) + f_1(t)f_2'(t)\cdots f_n(t) +$$

$$+ \dots + f_1(t)f_2(t)\cdots f_n'(t)$$

Die Determinante ist eine lineare Funktion in den Zeilen.

2. Schritt: Ableitung der Wronski-Determinante

$$W'(t) = \frac{d}{dt} \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} +$$

$$+ \dots + \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n)} & \phi_2^{(n)} & \dots & \phi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Ableitung der Wronski-Determinante

$$W'(t) = \frac{d}{dt} \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\det \begin{pmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{=0} +$$

$$+ \underbrace{\dots}_{=0} + \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n)} & \phi_2^{(n)} & \dots & \phi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Beachte:

- Der 1. Summand ist 0, da die 1. und 2. Zeile übereinstimmen.
- Der 2. Summand ist 0, da die 2. und 3. Zeile übereinstimmen.
- ...
- Der $n-1$te Summand ist 0, da die $n-1$te und $n$te Zeile übereinstimmen.
- Von der ganzen Summe bleibt nur der letzte Term stehen!

3. Schritt: Ableitung der Wronski-Determinante (continued)

Beachte: Die Ableitungen $\phi_k^{(n)}$ in der letzten Zeile können durch die Differentialgleichung (h) ersetzt werden. Es gilt ja

$$\phi_k^{(n)} = a_0\phi_k + a_1\phi_k' + \ldots + a_{n-2}\phi_k^{(n-2)} + a_{n-1}\phi_k^{(n-1)}$$

Also

$$W'(t) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \ldots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \ldots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \ldots & \phi_n'' \\ \ldots & & & \\ a_0\phi_1 + \ldots + a_{n-1}\phi_1^{(n-1)} & a_0\phi_2 + \ldots + a_{n-1}\phi_2^{(n-1)} & \ldots & a_0\phi_n + \ldots + a_{n-1}\phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

3. Schritt: Ableitung der Wronski-Determinante (continued)

Beachte: Die Ableitungen $\phi_k^{(n)}$ in der letzten Zeile können durch die Differentialgleichung (h) ersetzt werden. Es gilt ja

$$\phi_k^{(n)} = a_0\phi_k + a_1\phi_k' + \ldots + a_{n-2}\phi_k^{(n-2)} + a_{n-1}\phi_k^{(n-1)}$$

Also

$$W'(t) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \ldots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \ldots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \ldots & \phi_n'' \\ \ldots & & & \\ a_0\phi_1 + \ldots + a_{n-1}\phi_1^{(n-1)} & a_0\phi_2 + \ldots + a_{n-1}\phi_2^{(n-1)} & \ldots & a_0\phi_n + \ldots + a_{n-1}\phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere das a_0-fache der 1. Zeile von der letzten.
Subtrahiere das a_1-fache der 2. Zeile von der letzten.
...
Subtrahiere das a_{n-2}-fache der $n-1$ten Zeile von der letzten.
Dabei ändert sich die Determinante nicht!

3. Schritt: Ableitung der Wronski-Determinante (continued)

Beachte: Die Ableitungen $\phi_k^{(n)}$ in der letzten Zeile können durch die Differentialgleichung (h) ersetzt werden. Es gilt ja

$$\phi_k^{(n)} = a_0\phi_k + a_1\phi_k' + \ldots + a_{n-2}\phi_k^{(n-2)} + a_{n-1}\phi_k^{(n-1)}$$

Also

$$W'(t) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \ldots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \ldots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \ldots & \phi_n'' \\ \ldots & & & \\ a_0\phi_1 + \ldots + a_{n-1}\phi_1^{(n-1)} & a_0\phi_2 + \ldots + a_{n-1}\phi_2^{(n-1)} & \ldots & a_0\phi_n + \ldots + a_{n-1}\phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Subtrahiere das a_0-fache der 1. Zeile von der letzten.
Subtrahiere das a_1-fache der 2. Zeile von der letzten.
...
Subtrahiere das a_{n-2}-fache der $n-1$ten Zeile von der letzten.
Dabei ändert sich die Determinante nicht!

Es bleiben schliesslich nur die grünen Terme stehen.

4. Schritt: Ableitung der Wronski-Determinante (continued)

$$W'(t) = a_{n-1} \det \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \dots & \phi_n'' \\ \dots & & & \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = a_{n-1} W(t)$$

Also $W'(t) = a_{n-1}(t) W(t)$ wie gewünscht!