Spezielle Lösungen des Systems $Y' = AY$

Lemma

Sei $Ay_0 = \lambda_0 y_0$, d.h. y_0 ist ein EV von A zum EW λ_0. Dann ist $y(x) = e^{\lambda_0 x} y_0$ eine Lösung von $Y' = AY$.

Beweis: $y'(x) = e^{\lambda_0 x}\lambda_0 y_0 = e^{\lambda_0 x} A y_0 = A e^{\lambda_0 x} y_0 = A y(x)$.

Variation der Konstanten

Seien

$$y^{(n)} - a_0 y - a_1 y' - \ldots - a_{n-1} y^{(n-1)} = f \qquad \text{(i)}$$

$$y^{(n)} - a_0 y - a_1 y' - \ldots - a_{n-1} y^{(n-1)} = 0 \qquad \text{(h)}$$

eine inhomogene und die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. Die Koeffizienten $a_i(x)$ und $f(x)$ dürfen stetig von x abhängen.

Problem: Angenommen man kennt eine Basis $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ des homogenen Lösungsraums S_h.
Wie findet man dann eine partikuläre Lösung y von (i)?
Remember: Damit kennt man dann *alle* Lösungen von (i).

Lösungsansatz: Setze

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + \ldots + c_n(x) y_n(x)$$

und bestimme die $c_i(x)$ so, dass $y(x)$ (i) löst.

Wir wählen die $c_i'(x)$ als Lösung des LGS

$$\left.\begin{array}{ccccc} c_1'\,y_1 & + \dots + & c_n'\,y_n & = 0 \\ c_1'\,y_1' & + \dots + & c_n'\,y_n' & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1'\,y_1^{(n-2)} & + \dots + & c_n'\,y_n^{(n-2)} & = 0 \\ c_1'\,y_1^{(n-1)} & + \dots + & c_n'\,y_n^{(n-1)} & = f \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Dann gilt nämlich:

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + \dots + c_ny_n \\ y' &= \underbrace{c_1'y_1 + \dots + c_n'y_n}_{=0 \text{ wegen } (*)} + c_1y_1' + \dots + c_ny_n' \\ y'' &= \underbrace{c_1'y_1' + \dots + c_n'y_n'}_{=0 \text{ wegen } (*)} + c_1y_1'' + \dots + c_ny_n'' \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \underbrace{c_1'y_1^{(n-2)} + \dots + c_n'y_n^{(n-2)}}_{=0 \text{ wegen } (*)} + c_1y_1^{(n-1)} + \dots + c_ny_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} &= \underbrace{c_1'y_1^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)}}_{=f \text{ wegen } (*)} + c_1y_1^{(n)} + \dots + c_ny_n^{(n)} \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen wie rechts angegeben und addieren alles:

$$\begin{aligned}
y &= c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n && \mid \cdot(-a_0) \\
y' &= c_1 y_1' + \ldots + c_n y_n' && \mid \cdot(-a_1) \\
y'' &= c_1 y_1'' + \ldots + c_n y_n'' && \mid \cdot(-a_2) \\
&\vdots \\
y^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n y_n^{(n-1)} && \mid \cdot(-a_{n-1}) \\
y^{(n)} &= f + c_1 y_1^{(n)} + \ldots + c_n y_n^{(n)} && \mid \cdot 1
\end{aligned}$$

$y^{(n)} - a_0 y - a_1 y' - \ldots - a_{n-1} y^{(n-1)} = f$ wie gewünscht!

Beachte: Rechterhand summieren sich die farbigen Spalten zu Null, da alle $y_k \in S_h$. Also z.B.

$$c_1\left(y_1^{(n)} - a_0 y_1 - a_1 y_1' - a_2 y_1'' - \ldots - a_{n-1} y_1^{(n-1)}\right) \stackrel{(h)}{=} 0$$

Das LGS $(*)$ lösen wir mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix} \qquad (*)$$

hat die Lösung

$$c_k' = \frac{W_k}{W}$$

wobei

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \; W_k = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & 0 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & 0 & \dots & y_n' \\ \dots & & \dots & & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & f & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

In W_k wird die k-te Spalte von W durch die rechte Seite von $(*)$ ersetzt. W ist gerade die Wronski-Determinante von $y_1, \dots, y_n$, also insbesondere $W \neq 0$. Somit erhalten wir:

Satz

Eine partikuläre Lösung von (i) ist

$$y(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_1(t)}{W(t)} dt + \ldots + y_n(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_n(t)}{W(t)} dt$$

Beispiel

Löse $y'' + \omega^2 y = e^{ix}$, wobei $\omega^2 \notin \{0, 1\}$:

Eine Basis der homogenen Gleichung ist $y_1(x) = e^{i\omega x}$, $y_2(x) = e^{-i\omega x}$. Wir erhalten:

$$W = \det \begin{pmatrix} e^{i\omega x} & e^{-i\omega x} \\ i\omega e^{i\omega x} & -i\omega e^{-i\omega x} \end{pmatrix} = -2i\omega$$

$$W_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega x} \\ e^{ix} & -i\omega e^{-i\omega x} \end{pmatrix} = -e^{ix(1-\omega)}$$

$$W_2 = \det \begin{pmatrix} e^{i\omega x} & 0 \\ i\omega e^{i\omega x} & e^{ix} \end{pmatrix} = e^{ix(1+\omega)}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Wir erhalten also als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{i\omega x}\int_0^x \frac{-e^{it(1-\omega)}}{-2i\omega}\,dt + e^{-i\omega x}\int_0^x \frac{e^{it(1+\omega)}}{-2i\omega}\,dt \\ &= \frac{e^{i\omega x}}{2i\omega}\left(\frac{e^{ix(1-\omega)}}{i(1-\omega)} - \frac{1}{i(1-\omega)}\right) - \frac{e^{-i\omega x}}{2i\omega}\left(\frac{e^{ix(1+\omega)}}{i(1+\omega)} - \frac{1}{i(1+\omega)}\right) \end{aligned}$$

Die gelben Terme lösen die homogene Gleichung und können weggelassen werden. Es bleibt:

$$y(x) = \frac{e^{ix}}{\omega^2 - 1}$$

Bemerkung: Der Imaginärteil von $y(x)$ löst den Imaginärteil der Gleichung. D.h. $\frac{\sin(x)}{\omega^2-1}$ ist eine partikuläre Lösung von $y'' + \omega^2 y = \sin(x)$.

Jordan-Normalform

Satz

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann existiert eine reguläre Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so, dass $A = QJQ^{-1}$ für eine Blockdiagonalmatrix

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}$$

Jeder Jordan-Block hat die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Die λ_i sind die EW von A. Die geom. Vf von λ_i entspricht der Anzahl Jordan-Blöcke zum EW λ_i. Die alg. Vf von λ_i ist die Gesamtdimension der Jordan-Blöcke zum EW λ_i.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Dann liefert die Matlab-Sequenz

```
A = [1 -3 -2; -1 1 -1; 2 4 5]
[Q,J] = jordan(A)
```

das Resultat

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Beachte: Ein einzelner Jordan-Block J zum Eigenwert λ kann geschrieben werden als $J = \lambda I + J'$ wobei I die Einheitsmatrix ist:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{=: J'}$$

Weil $IJ' = J'I$ gilt dann für $x \in \mathbb{R}$

$$e^{Jx} = e^{\lambda x I + J'x} = e^{\lambda x I} e^{J'x} = e^{\lambda x} e^{J'x}$$

Da

$$J'^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ & 0 & \dots & 1 & \\ & & \ddots & & \ddots \\ & 0 & & 0 & \dots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

gerade auf der k-ten Nebendiagonalen lauter 1 hat, folgt sofort

$$e^{J'x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k J'^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{1!} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir das folgende Lemma:

Lemma

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \implies e^{Jx} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x}{1!} & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Anwendung

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $A = QJQ^{-1}$ die Jordan-Zerlegung. Dann gilt $e^{Ax} = Qe^{Jx}Q^{-1}$ mit

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & & & 0 \\ & e^{J_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & e^{J_k x} \end{pmatrix}$$

wobei die J_i die Jordan-Blöcke von J sind.

Anwendung

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Wir hatten gesehen, dass $A = QJQ^{-1}$ für

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} Y' &= AY \\ Y(0) &= Y_0 \end{aligned}$$

lautet somit

$$\begin{aligned} Y(x) = e^{Ax} Y_0 &= Q \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix} Q^{-1} Y_0 \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} 1-x & 2-x-e^x & 1-x-e^x \\ -x & 1-x & -x \\ 2x & 2(x-1+e^x) & 2x+e^x \end{pmatrix} Y_0 \end{aligned}$$