LinAlg Study Center

Während des Semesters jeweils **mittwochs 12-13 Uhr, im ML F 39**.

Sie können unangemeldet erscheinen, dort arbeiten und Fragen aller Art zur Vorlesung und zu den Übungen stellen.

Das Study Center ist während der Osterferien und am 4. Mai geschlossen.

Normierte VR

Definition

Sei V ein VR. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

mit den Eigenschaften

(N1) $\forall v \in V$: $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

(N2) $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

(N3) $\forall v, w \in V$: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Die Ungleichung in (N3) heisst **Dreiecksungleichung**.

Beispiele von Normen

- $\|v\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$ (Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$)
- $\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$ (Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$)
- $\|v\|_p := (|v_1|^p + \ldots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ (p-Norm auf $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$)
- Analog für komplexe VR: z.B.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1+2i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix} \right\|_1 = |1+2i| + |i| + |1-i| = \sqrt{5} + 1 + \sqrt{2}$$

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler VR und $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei beliebige Normen auf V. Dann existieren Konstanten $A, B > 0$ so, dass $\forall x \in V$:

$$\|x\|_a \leq A\|x\|_b \text{ und } \|x\|_b \leq B\|x\|_a$$

Konvergenz

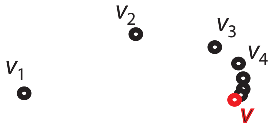
$\|x - y\|$ ist ein Mass für den Abstand der Vektoren x und y. Jede Norm induziert daher einen Konvergenzbegriff:

Konvergenz

Sei (v_n) eine Folge im normierten VR V. Dann konvergiert die Folge gegen $v \in V$, falls

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - v\| = 0$$

Man schreibt dann $\lim_{n \to \infty} v_n = v$.



Konvergenz

Wegen des vorigen Satzes gilt:

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler VR und $\| \cdot \|_a$ und $\| \cdot \|_b$ zwei beliebige Normen auf V. Dann gilt:

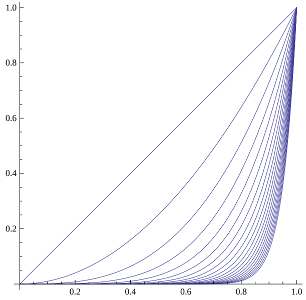
$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_a = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_b = 0$$

In endlichdimensionalen Räumen spielt es also für die Konvergenz keine Rolle, welche Norm man verwendet. Dies ist nicht mehr so in unendlichdimensionalen Räumen.

Beispiele für Normen auf $C([a,b])$

- $\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$ (Maximumsnorm)
- $\|f\|_{L^p} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ (p-Norm, $1 \leq p < \infty$)

Bezüglich jeder p-Norm konvergiert die Folge $f_n(x) := x^n$ auf $[0,1]$ gegen die Funktion $g(x) \equiv 0$, in der Maximumsnorm jedoch nicht.



Beispiel

- Auf $C^1([a,b])$ ist durch

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{L^\infty} + \|f'\|_{L^\infty}$$

eine Norm definiert.

Für die Folge $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^\infty} = 0$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{C^1} = \infty$$

Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}^{m\times n}$

Sei A eine $m \times n$-Matrix.

- $\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ (Hilbert-Schmidt-Norm)
- $\|A\|_{\mathrm{SM}} := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ (Spaltenmaximumsnorm)
- $\|A\|_{\mathrm{ZM}} := \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (Zeilenmaximumsnorm)
- $\|A\| := \max\{\|Ax\|_b : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_a \le 1\}$ (Operatornorm)

  Die Operatornorm hängt ab von der Wahl der Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Skalarprodukt

Das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gegeben durch

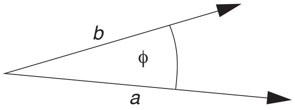
$$a \cdot b = \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Es gilt

$$\|a\|_2 = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

und

$$\cos \phi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$



Insbesondere: $a \perp b \iff \langle a, b \rangle = 0$

Definition

Sei V ein reeller VR. Eine Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$$

heisst **Skalarprodukt**, falls

(S1) $\forall x,y,z \in V$: $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$
$\forall x,y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

(S2) $\forall x,y \in V$: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

(S3) $\forall x \in V$: $\langle x,x\rangle \geq 0$ und $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heisst **Innenproduktraum**.

(S1) und (S2) zusammen besagen, dass das Skalarprodukt **in beiden Argument linear** ist. (S3) besagt, dass das Skalarprodukt **positiv definit** ist.

Definition

Die auf einem Innenproduktraum durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

gegebene Norm heisst die vom Skalarprodukt **induzierte Norm**.

Bemerkung: Aus (S1)–(S3) für das Skalarprodukt folgt (N1)–(N3) für die induzierte Norm.

Beispiele

- Auf $\mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ das Standardskalarprodukt. Es induziert die euklidische Norm.
- Auf $C([a, b])$ ist ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Es induziert die Norm $\|\cdot\|_{L^2}$.

Bemerkung

Eine Norm $\|\cdot\|$ wird genau dann von einem Skalarprodukt induziert, wenn die **Parallelogrammregel** gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

In diesem Fall ist das Skalarprodukt durch die **Polarisationsformel** aus der Norm rekonstruierbar:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

Definition

Zwei Vektoren x, y eines Innenproduktraums heissen **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$.

Notation: $x \perp y$

Beispiele

- Bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.
- Wir betrachten $f_n(x) := \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}_0$, in $C([0, 2\pi])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Dann gilt $f_n \perp f_m$ falls $m \neq n$.