Orthogonalprojektion

Satz

Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Dann gilt

- Die Orthogonalprojektion des Vektors x auf den Vektor $y \neq 0$ ist
$$z = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\, y$$
- $\forall x, y \in V$: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$
(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
- $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ist eine Norm.
- $x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
(Satz von Pythagoras)

Definition

$x \in V$ heisst Einheitsvektor, falls $\|x\| = 1$.

Satz

In einem VR V seien $e_1, \ldots, e_k$ paarweise orthogonale Vektoren und alle verschieden von 0. Dann sind diese Vektoren linear unabhängig.

Korollar

n paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem n-dimensionalen VR V bilden eine Basis.

Definiton: Eine solche Basis heisst **Orthonormalbasis** (ONB).

Satz

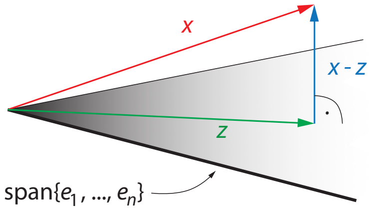
Seien $e_1, \dots, e_n$ paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem VR V. Dann ist

$$z = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

die Orthogonalprojektion von $x \in V$ auf $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. D.h. für alle $v \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ gilt

$$x - z \perp v$$

z realisiert den kleinsten Abstand eines Punktes in $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ von x.



Korollar

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine ONB in einem VR V. Dann gilt für jedes $x \in V$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

Satz

Sei $b_1 \ldots, b_n$ eine Basis eines VR V. Dann existiert eine ONB $e_1, \ldots, e_n$ so dass für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\operatorname{span}\{b_1 \ldots, b_k\} = \operatorname{span}\{e_1 \ldots, e_k\}$$

Die Basis $e_1, \ldots, e_n$ lässt sich mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens konstruieren. Dazu setzt man

$$e_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

und dann rekursiv für $k > 1$

$$e'_k := b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_k, e_i \rangle e_i \quad \text{und} \quad e_k := \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$$

Definition

Sei V ein komplexer VR. Dann heisst

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

ein (komplexes) Skalarprodukt, falls gilt

(S1) wie für reelle VR

(S2') $\forall x, y \in V$: $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

(S3) wie für reelle VR

Lineare Abbildungen und Matrizen

Ziel: Jede lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen VR durch eine Matrix darstellen.

Situation:

$$V \xrightarrow{\quad\mathcal{F}\text{ linear}\quad} W$$

Basis $b_1, \ldots, b_n$	Basis $c_1, \ldots, c_m$

$$x \longmapsto y := \mathcal{F}(x)$$

$x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j$	$y = \sum_{i=1}^{m} y_i c_i$
Koordinatenvektor von x bez. $\mathcal{B}$:	Koordinatenvektor von y bez. $\mathcal{C}$:
$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$	$[y]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

Frage: Wie hängen $[x]_{\mathcal{B}}$ und $[y]_{\mathcal{C}}$ zusammen?

Beachte: $\mathcal{F}(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$, d.h. $[\mathcal{F}(b_j)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Also:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{m} y_i c_i = \\ &= \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{F}(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) c_i \end{aligned}$$

Wir lesen ab:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

- $[y]_{\mathcal{C}}$ erhält man also durch Multiplikation der Matrix $A = (a_{ij})$ mit $[x]_{\mathcal{B}}$: Also $[y]_{\mathcal{C}} = A\,[x]_{\mathcal{B}}$.
- A hat als Spalten gerade die Koordinatenvektoren $[\mathcal{F}(b_j)]_{\mathcal{C}}$.

Satz

Seien V und W VR mit $\dim V = n$, $\dim W = m$. Dann lässt sich jede lineare Abbildung $\mathcal{F}: V \to W$ durch eine $m \times n$-Matrix darstellen. Dazu wählt man Basen $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ in V und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ in W. Seien

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } [y]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

die Koordinatenvektoren von x und $y = \mathcal{F}(x)$ bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\mathcal{C}$. Dann gilt

$$[y]_{\mathcal{C}} = A[x]_{\mathcal{B}}$$

Hierbei ist

$$A = ([\mathcal{F}(b_1)]_{\mathcal{C}} \ldots [\mathcal{F}(b_n)]_{\mathcal{C}})$$

D.h. die Spalten von A sind die Koordinatenvektoren von $\mathcal{F}(b_j)$ bezüglich $\mathcal{C}$.